Министерство образования Кировской области
Кировское областное государственное
общеобразовательное автономное учреждение
«ВЯТСКИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ ЛИЦЕЙ»
ул. Ивана Попова, д. 37, г. Киров, 610014
Тел./факс (8332) 56-39-00. E-mail: 43_vtl@mail.ru
ОГРН 1034316505761, ОКПО 10958448, ИНН/КПП 4347023393/434501001

Использование метода объёмов для решения стереометрических задач в рамках проведения элективного курса «Избранные вопросы математики» при подготовке к ЕГЭ (из опыта работы)

Автор: Чернявская
Светлана Серафимовна,
учитель математики
высшей квалификационной
категории

КИРОВ
2025

Задание №14 Единого государственного экзамена по профильной математике представляет стереометрическую задачу на определение связей между элементами некоторых многогранников и тел вращений.

Задача по стереометрии является одной из самых сложных заданий ЕГЭ по математике. Если выпускники претендуют на высокий балл, то нужно постараться решить эту задачу или хотя бы продвинуться в её решении как можно дальше. Для успешного решения задачи важно свободно оперировать изученными определениями, свойствами, теоремами, применять их в различных ситуациях, анализировать условие и находить возможные пути решения. Выполнение задания является одним из характерных признаков наиболее сильной группы участников. Навыки, необходимые для верного решения задачи, формируются на протяжении многих лет обучения математике.

В 2023-2024 и 2024-2025 учебных годах автор статьи вела курс внеурочной деятельности для 10-11 классов «Избранные вопросы математике» при подготовке к ЕГЭ по профильной математике. Среди задач предложенного курса можно выделить следующие подзадачи:

- формирование у учащихся навыков решения стереометрических задач различными способами;
- стимулирование исследовательской деятельности школьников;
- формирование логического и творческого мышления учащихся;
- повышение математической культуры;
- развитие устойчивого интереса учащихся к изучению математики;
- подготовка к итоговой аттестации и продолжению образования.

При решении задач стереометрии обычно используют поэтапно-вычислительный метод, координатно-векторный метод и метод объёмов. Большинство задач, рассматриваемых при подготовке к экзамену, могут быть решены не единственным способом, поэтому ученикам и учителям рекомендуется находить более рациональные пути выполнения поставленных заданий.

Опираясь на собственный педагогический опыт, могу предложить разбор ключевых задач и поиск их решения по таким темам, как «Расстояние от точки до плоскости»; «Расстояние между скрещивающимися прямыми»; «Угол между прямой и плоскостью». При решении предложенных задач особое внимание уделено *методу объёмов*.

МЕТОД ОБЪЁМОВ

Объём треугольной пирамиды можно посчитать несколькими разными способами. *Методом объёмов* называют приравнивание двух подходящих выражений для объема, в результате чего удается вычислить искомую величину (расстояние или угол).

Метод объёмов можно использовать, вычисляя:

- расстояние от точки до плоскости;
- расстояние между скрещивающимися прямыми;
- угол между прямой и плоскостью;
- угол между плоскостями.

Расстояние от точки до плоскости

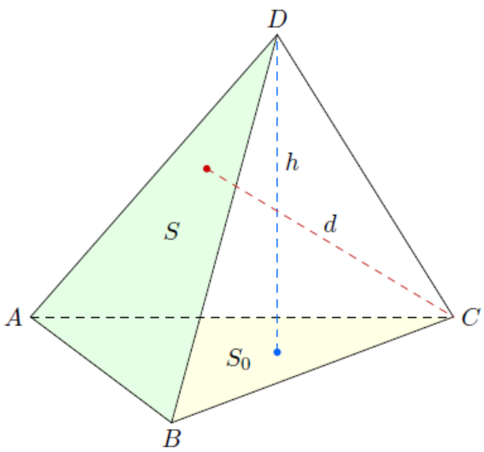


Рис. 1. $S_0h = Sd$

Пусть S_0 — площадь грани ABC, h — высота, опущенная на эту грань, S — площадь грани ABD. С одной стороны, объём пирамиды $ABCD$ может быть найден по формуле:

$$V = \frac{1}{3}S_0h. \tag{1}$$

С другой стороны, за основание можно принять грань ABD, и тогда

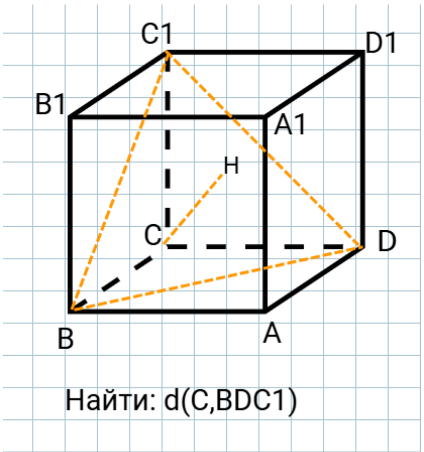
$$V = \frac{1}{3}Sd. \tag{2}$$

Приравнивая правые части формул (1) и (2), получим:

$$S_0 h = Sd. \tag{3}$$

Из соотношения (3) можно найти искомую величину d.

Задача 1. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно а. Найти расстояние от точки С до плоскости BDC_1.



Решение:

1. Рассмотрим пирамиду $BDCC_1$: $V = \frac{1}{3} \cdot S_{BDC} \cdot CC_1 = \frac{a^3}{6}$

2. Рассмотрим равносторонний треугольник BDC_1: $S_{BDC_1} = \frac{(a\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$

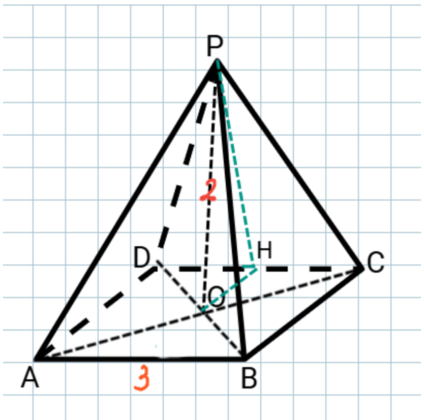
3. Найдем объём пирамиды $BDCC_1$, приняв за основание треугольник BDC_1 и проведенную к нему высоту CH:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{BDC_1} \cdot CH \Rightarrow CH = \frac{3 \cdot V}{S_{BDC_1}} = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{3}$$

4. Высота CH является расстоянием от точки С до плоскости $BDC_1 \Rightarrow d(C; BDC_1) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Задача 2. В правильной четырехугольной пирамиде PABCD сторона основания равна 3, высота 2. Найти расстояние от вершины А до грани PCD.



Найти: d(A, PCD)

Решение:

1. Рассмотрим пирамиду PADC, приняв за основание треугольник DAC и проведенную к нему высоту PO :

$V = \frac{1}{3} \cdot S_{DAC} \cdot PO = 3$

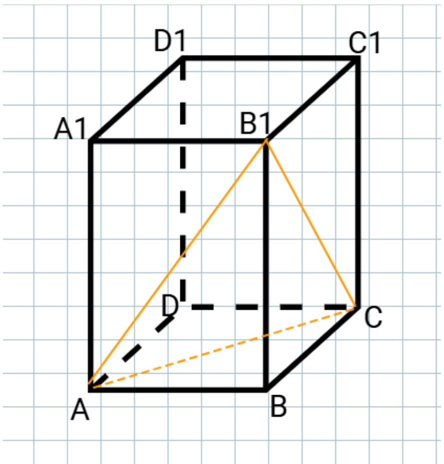
2. Проведем перпендикуляры PH и OH к ребру DC: $PH = \sqrt{OH^2 + PO^2} = \frac{5}{2}$

3. Рассмотрим треугольник PDC: $S_{PDC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{4}$

4. Найдем расстояние от точки A до плоскости PCD : $d(A; PCD) = \frac{3 \cdot V}{S_{PDC}} = \frac{12}{5} = 2,4$

Ответ: 2,4

Задача 3. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны ребра $AB=1$; $AD=\sqrt{3}$; $AA_1=\sqrt{6}$. Найдите расстояние от точки B до плоскости AB_1C.



Найти: d(B, AB1C)

Решение:

1. Рассмотрим пирамиду ABCD1, приняв за основание треугольник ABC и проведенную к нему высоту BB1:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot BB_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{6} = \frac{3\sqrt{2}}{6}$$

2. По теореме Пифагора найдем $AC=2$, $AB1=\sqrt{7}$, $CB1=3$

3. По формуле Герона найдем площадь треугольника ACB1:

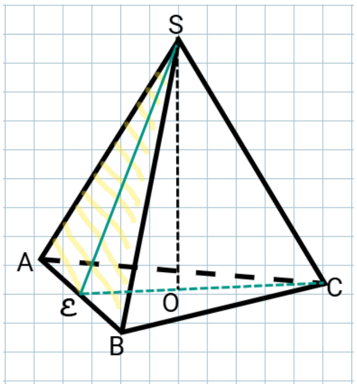
$$S = \sqrt{\frac{5+\sqrt{7}}{2} \cdot \left(\frac{5+\sqrt{7}}{2} - 2\right) \cdot \left(\frac{5+\sqrt{7}}{2} - \sqrt{7}\right) \cdot \left(\frac{5+\sqrt{7}}{2} - 3\right)} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

4. Найдём расстояние от точки B до плоскости AB1C:

$$d(B; AB_1C) = \frac{3 \cdot V}{S_{ACB_1}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$

Задача 4. Высота правильной треугольной пирамиды равна 4, а угол между боковой гранью и плоскостью основания равен 60^0. Найдите расстояние от вершины основания до плоскости противолежащей ей боковой грани.



Найти: d(C, ABS)

Решение:

1. Построим линейный угол двугранного угла при ребре AB: $\angle SEC = 60^\circ$

2. Из треугольника SEO найдем EO - радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник ABC: $r = EO = ctg\,60^\circ \cdot SO = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

3. Рассмотрим равносторонний треугольник ABC: $r = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, $r = \frac{a}{2\sqrt{3}} \Rightarrow a = 8$

$$S_{ABC} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}$$

4. Найтем объём пирамиды SABC, приняв за основание треугольник ABC и высоту SO:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SO = \frac{64\sqrt{3}}{3}$$

5. Из треугольника SEO найдем $SE = \frac{SO}{\sin 60^\circ} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

6. Найдем площадь треугольника SAB: $S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot SE = \frac{32\sqrt{3}}{3}$

7. Найдем расстояние от точки C до плоскости ABS: $d(C; ABS) = \frac{3 \cdot V}{S_{ABS}} = 6$

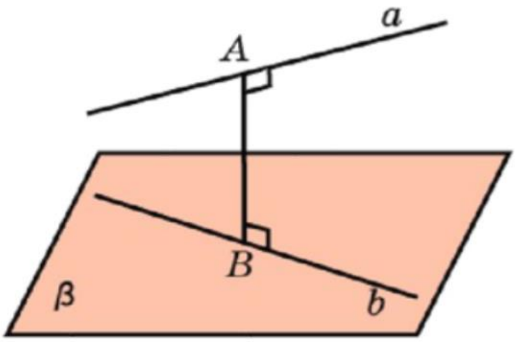
Ответ: 6

Расстояние между скрещивающимися прямыми

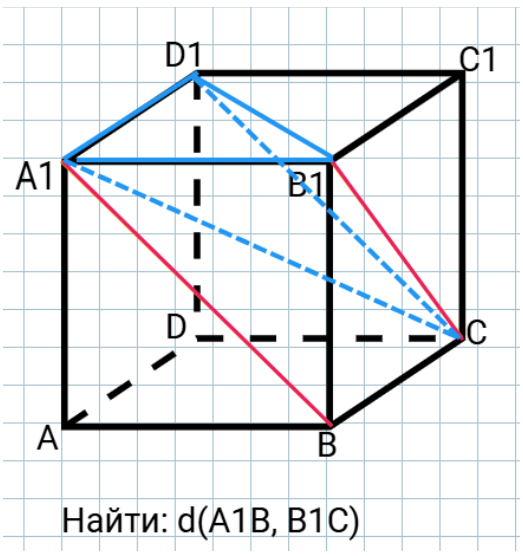
Расстоянием между двумя скрещивающимися прямыми в пространстве называется длина общего перпендикуляра, проведенного к этим прямым.

Если одна из двух скрещивающихся прямых лежит в плоскости, а другая – параллельна этой плоскости, то расстояние между данными прямыми равно расстоянию между прямой и плоскостью.

Если две скрещивающиеся прямые лежат в параллельных плоскостях, то расстояние между этими прямыми равно расстоянию между параллельными плоскостями.



Задача 5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным 3, найдите расстояние между прямыми A_1B и B_1C.



Решение:

1. В грани DCC_1D_1 проведем D_1C параллельно A_1B

2. Найдем объём пирамиды $CA_1B_1D_1$, приняв за основание треугольник $A_1B_1D_1$ и высоту CC_1:

$$V = \frac{1}{3}\cdot S_{A_1B_1D_1}\cdot CC_1 = \frac{9}{2}$$

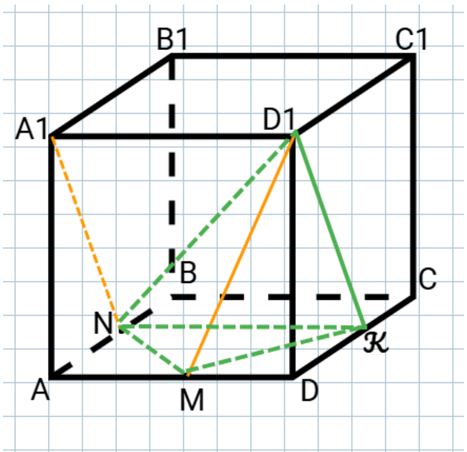
3. Найдем площадь равностороннего треугольника D_1B_1C: $S = \frac{(3\sqrt{2})^2\cdot\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$

4. Найдем расстояние от точки A_1 до плоскости D_1B_1C, которое будет являться искомым расстоянием между скрещивающимися прямыми:

$$d(A_1B;\, B_1C) = \frac{3\cdot V}{S_{D_1B_1C}} = \sqrt{3}$$

Ответ: $\sqrt{3}$

Задача 6. Точки M и N – середины ребер AD и AB соответственно куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным 6. Найдите расстояние между прямыми D_1M и A_1N.



Найти: d(D1M, A1N)

Решение:

1. В грани DCC_1D_1 проведём D_1K, параллельно A_1N

2. Найдем площадь треугольника KMN: $S = \frac{1}{4}\cdot S_{кв.} = \frac{1}{4}\cdot 6^2 = 9$

3. Найдем объем пирамиды D_1KMN, приняв за основание треугольник KMN и высоту DD_1:

$$V = \frac{1}{3}\cdot 9\cdot 6 = 18$$

4. Найдем площадь треугольника MD_1K: $MD_1 = D_1K = 3\sqrt{5}$; $MK = 6$, по формуле Герона $S_\Delta = \frac{27}{2}$

5. Найдем расстояние от точки N до плоскости MD_1K, которое будет являться искомым расстоянием между скрещивающимися прямыми:

$$d(D_1M;\, A_1N) = \frac{3\cdot V}{S_{MD_1K}} = 4$$

Ответ: 4

Угол между прямой и плоскостью

Идея вычисления угла между прямой и плоскостью очень проста и основана на предварительном вычислении расстояния от точки до плоскости. Давайте посмотрим на рис. 4.

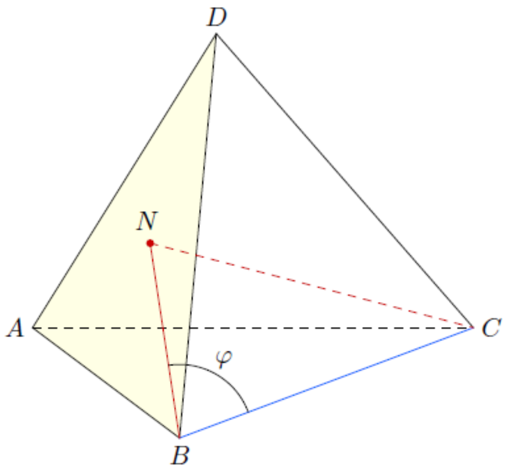
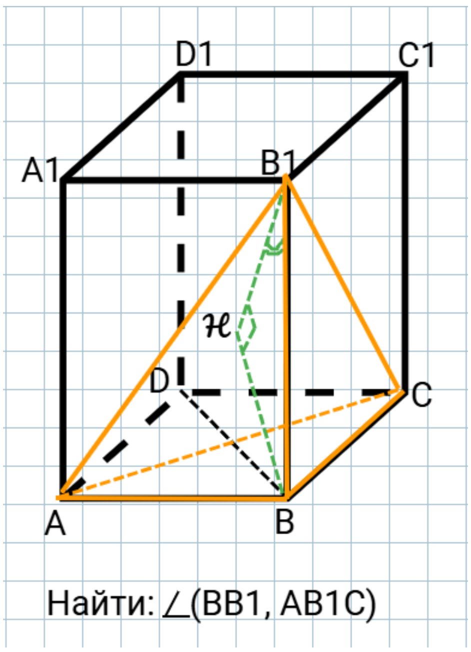


Рис. 4. Угол между прямой и плоскостью

Предположим, нам нужно найти угол φ между прямой BC и плоскостью ABD. Вычисляем сначала высоту CN, после чего находим:

$$\sin\varphi = \frac{CN}{BC}.$$

Задача 7. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны ребра $AB=1$, $AD=\sqrt{3}$, $AA_1=\sqrt{6}$. Найдите угол между прямой BB_1 и плоскостью ACB_1.



Решение:

1. Из точки B опустим перпендикуляр BH на плоскость ACB1, тогда угол BB1H является искомым углом.

2. Найдем объём пирамиды B1ABC, приняв треугольник ABC за основание и высоту BB1:

$$V = \frac{1}{3} \cdot BB_1 \cdot S_{ABC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3. Найдем площадь треугольника ACB1 по формуле Герона:

$$AC = 2;\quad AB_1 = \sqrt{7};\quad B_1C = 3 \Rightarrow S_{ACB_1} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

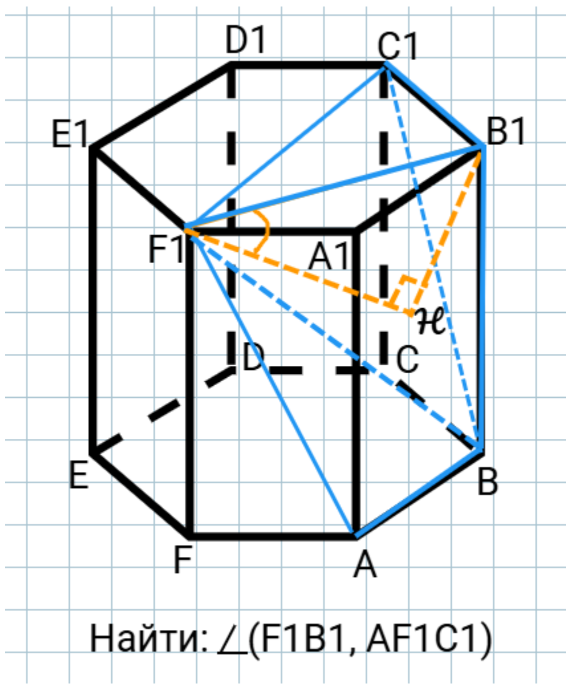
4. Найдем длину перпендикуляра BH: $BH = \frac{3 \cdot V}{S_{ACB_1}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

5. Рассмотрим прямоугольный треугольник BB1H:

$$\sin\angle B_1 = \frac{BH}{BB_1} = \frac{1}{3} \Rightarrow \angle BB_1H = \arcsin\frac{1}{3}$$

Ответ: $\frac{1}{3}$

Задача 8. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ сторона основания равна 3, а высота равна 1. Найдите угол между прямой F_1B_1 и плоскостью AF_1C_1.



Решение:

1. Проведем перпендикуляр B_1H на плоскость ABC_1, тогда угол B_1F_1H является искомым углом

2. Найдем объем пирамиды $BB_1C_1F_1$, приняв треугольник $F_1B_1C_1$ за основание и высоту BB_1:

$F_1C_1 = 6$; $C_1B_1 = 3$; $F_1B_1 = 3\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ по формуле Герона, $S_{F_1B_1C_1} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{F_1B_1C_1} \cdot BB_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

3. Из прямоугольного треугольника BB_1F_1 найдем $BF_1 = 2\sqrt{7}$

4. Найдем площадь треугольника BC_1F_1 по формуле Герона:

$F_1C_1 = 6$; $BF_1 = 2\sqrt{7}$; $BC_1 = \sqrt{10}$ $\Rightarrow$ $S_{BC_1F_1} = \frac{3\sqrt{31}}{2}$

5. Найдем длину перпендикуляра $B_1H = \frac{3 \cdot V}{S_{BC_1F_1}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{31}}$

6. Рассмотрим прямоугольный треугольник B_1F_1H: $\sin\angle F_1 = \frac{B_1H}{F_1B_1} = \frac{\sqrt{31}}{31}$ $\Rightarrow \angle B_1F_1H = \arcsin\frac{\sqrt{31}}{31}$

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{31}}{31}$

Итак, метод объёмов действительно позволяет решать некоторые типы стереометрических задач более рационально. Такие решения более понятны, удобны и занимают меньше времени по сравнению с традиционными.

Данный метод рекомендуется для рассмотрения с целью подготовки учащихся к ЕГЭ, для решения задач олимпиадного уровня.