Кировское областное государственное образовательное автономное

учреждение дополнительного профессионального образования

«Институт развития образования Кировской области»

Кировское областное государственное общеобразовательное автономное учреждение «Лицей естественных наук

Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение средняя общеобразовательная школа №52 города Кирова

**Поурочные разработки по учебному курсу «Вероятность и статистика» за курс 11 класса (базовый уровень).**

**Урок 1-4. Повторение, обобщение, систематизация знаний за 10 класс**

Симонова Ольга Владимировна,

учитель математики КОГОАУ ЛЕН г. Кирова.

Сырцова Елена Александровна,

учитель математики,
МБОУ СОШ с УИОП №52 г. Кирова

2025

**Модуль 1. Вводное повторение**

**Методический комментарий:** основная цель данного модуля - повторение и систематизация некоторых тем, изученных в предыдущие годы для подготовки восприятия материала одиннадцатого класса.

**Содержание модуля:**

Элементы комбинаторики. Треугольник Паскаля. Испытания Бернулли.

***Урок №1***

**Тема урока №1**: **повторение темы «Элементы комбинаторики»**

**Тип урока**: урок повторения

**Образовательная цель урока**: актуализация знаний и умений, повторение определений основных типов соединений (перестановки, размещения, сочетания), совершенствование умений распознавать виды соединений в текстах задач, а также применять в подходящих случаях правила сложения и произведения.

Воспитательные и развивающие цели учитель ставит самостоятельно, исходя из особенностей классов.

**Ход урока.**

***«Учение без размышления бесполезно, но и размышление без учения опасно». (Конфуций)***

**Задание 1**: используя опорный конспект, повторим определения и формулы комбинаторики, а также их применение для решения задач.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Определение | Примеры | Задания для обучаемых |
| 1. | Комбинаторика – это раздел математики, который изучает, ***сколько*** существует комбинаций между элементами множества. | Междубуквами алфавита, цифрами, товарами в магазине, выбора дороги | Приведите примеры заданий на вычисление количества комбинаций элементов некоторых множеств. |
| 2. | Правило произведения и сложения: если объект А можно выбрать n способами и после каждого такого выбора объект В можно выбрать m способами, то для пары «А и В» есть n • m вариантов, а для пары «А или В» есть n + m вариантов. | Выбери пример из приведенных ниже | Приведи свой пример |
| 3. | Размещением из n элементов по m (n ≥ m) называется упорядоченная выборка m элементов из множества n элементов.  | $$А \_{n}^{m}=\frac{n!}{\left(n-m\right)!}$$ | Выбери пример из приведенных ниже |
| 4. | Перестановки – это специальный случай размещения, когда участвуют все элементы множества.Вычисляя перестановки, определяют, сколькими различными способами можно переупорядочить элементы множества, не меняя их количество | $Р\_{n}$= n! | Выбери пример из приведенных ниже |
| 5. | Сочетания из n элементов по m (n≥m) называется выборка m элементов из неупорядоченного множества n элементов. | $$С\_{n}^{ m}=\frac{n!}{m!\left(n-m\right)!}$$ | Выбери пример из приведенных ниже |

\*Информацию о перестановках, размещениях и сочетаниях можно представить схематично. К данной схеме желательно обращаться всякий раз при определении типа соединения (перестановки, размещения, сочетания).



|  |  |
| --- | --- |
| Примеры задач | Комментарии  |
| 1. Сколько способов существует составить двузначное число из цифр 1,2,5,9? Цифры не повторяются.

Решение: N = 4 • 3 = 12 | Правило произведения |
| 1. Сколько способов существует составить четное двузначное число из цифр 1,2,4,5,9? Цифры не повторяются.

Решение: N = 4 + 4 = 8 | Правило сложения |
| 1. Сколько способов существует составить двузначное число из цифр 1,2,5,9? Цифры не повторяются.

Решение: N = $А\_{4}^{2}$ = $\frac{4!}{\left(4-2\right)!} $= 12 | размещения |
| 1. Сколько существует способов составить четырехзначных чисел из цифр 1,2,8,9? Цифры не повторяются.

Решение: N =$ Р\_{4}$= 4! = 24  | перестановки |
| 1. У Маши 12 платьев. Сколько наборов из 2 платьев можно сделать на день? Решение: $N = С\_{12}^{2}=\frac{12!}{2!\left(12-2\right)!}$ =$ \frac{11 •12}{2}$ = 66
 | сочетания |

\* Красным цветом выделены комментарии для учителя

**Задание 2. Самостоятельно решите задачи**

1. Сколькими способами 9 человек могут встать в очередь в кассу?
2. Из 30 участников собрания надо выбрать председателя и секретаря. Сколькими способами это можно сделать?
3. В команде 7 человек. Сколькими способами можно выбрать пару для участия в соревнованиях?
4. Курьер должен разнести пакеты в 7 различных учреждений. Сколько маршрутов он может выбрать?
5. Из 9 предметов надо составить расписание из 4 разных уроков. Сколько вариантов можно предложить?
6. В команде 6 мальчиков и 5 девочек. Для соревнований нужно выбрать команду из 2 мальчиков и 2 девочки. Сколько вариантов можно предложить?

**Решения:**

№1. N = $Р\_{9}$= 9! = 362 880.

№2. N = $А\_{30}^{2}$ = $\frac{30!}{\left(30-2\right)!}$ = 870.

№3. $N = С\_{7}^{2}=\frac{7!}{2!\left(7-2\right)!}$ =$ \frac{7 •6}{2}$ = 21.

№4. N =$ Р\_{7}$= 7! = 5040.

№5. N = $А\_{9}^{4}$ = $\frac{9!}{\left(9-4\right)!}$ = 3024.

№6. $ С\_{6}^{ 2}=\frac{6!}{2!\left(6-2\right)!}$ =$ \frac{5 •6}{2}$ =15, $ С \_{5}^{2}=\frac{5!}{2!\left(5-2\right)!}$ =$ \frac{4 •5}{2}$ =10, $N =$15$ •10=150.$

**Итоги урока**

**Диктант**

Прочитайте текст. Запишите тип соединения и соответствующую ему формулу.

а) Сколькими способами пять детей могут разместиться на пятиместной скамейке?

б) На станции 10 запасных путей, сколько способов расставить на них 4 поезда?

в) Сколько способов выбрать три вида комплексных обедов из пяти, предложенных в меню?

**Самопроверка**

а) перестановки $P\_{5}=5!$

б) размещения $А\_{10}^{4}$ = $\frac{10!}{6!}$

в) сочетания $С \_{5}^{3}$ = $\frac{5!}{3!∙2!}$

Если все задания выполнены верно – вы хорошо ориентируетесь в материале, можете верно определить тип соединения и знаете соответствующую формулу.

Если вы сделали ошибки – необходимо повторить соответствующие определения, формулы и еще раз поработайте со схемой.

**Домашнее задание:**

1. Повторите определения и формулы для основных типов соединений, а также правила сложения и произведения.
2. Решите задачи, выбрав тип соединения, работая со схемой.

1) Из 8 учащихся класса, успешно выступивших на школьной олимпиаде, надо выбрать троих для участия в городской олимпиаде. Сколькими способами можно сделать этот выбор?

2) Из 15 туристов надо выбрать дежурного и его помощника. Сколькими

способами это можно сделать?

1. Из 9 книг и 6 журналов надо выбрать 2 книги и 3 журнала. Сколько существует способов?

4)\* На полке надо разместить 10 различных пособий по алгебре, из которых четыре – сборники задач, причем сборники задач должны стоять рядом. Определите число возможных способов.

5)\* Десять девочек должны разместиться на десятиместной скамье так, чтобы входящие в их число Катя, Вера и Юля сидели рядом, причем Юля сидела бы между Катей и Верой. Определите число возможных комбинаций.

***Урок №2***

**Тема урока №2:** Вероятность элементарных событий

**Тип урока:** урок повторения

**Образовательная цель урока:** повторение основных понятий и приемов решения задач на вычисление вероятностей равновозможных событий

**Ход урока**

***«Образование – это не подготовка к жизни, образование – это сама жизнь». (Джон Дьюи)***

**Проверка домашнего задания**

1. Из 8 учащихся класса, успешно выступивших на школьной олимпиаде, надо выбрать троих для участия в городской олимпиаде. Сколькими способами можно сделать этот выбор?

**Решение.** Если считать, что все 8 человек одинаково успешно выступили на школьном этапе, то тип соединения, о котором говорится в задаче – сочетания, так как порядок не важен, и не все элементы участвуют в соединении. Тогда количество способов выбрать учеников для участия в городской олимпиаде вычисляем

N = $ С \_{8}^{ 3}=\frac{8!}{3!\left(8-3\right)!}$ = 56.

**Ответ:** 56.

1. Из 15 туристов надо выбрать дежурного и его помощника. Сколькими способами это можно сделать?

**Решение.** В данном случае есть должности: дежурный и помощник,таким образом порядок важен, не все элементы участвуют в соединении, значит речь идет о размещениях N = $А\_{15}^{2}$ = $\frac{15!}{\left(15-2\right)!}$ = 210.

**Ответ:** 210.

1. Из 9 книг и 6 журналов надо выбрать 2 книги и 3 журнала. Сколько существует способов?

**Решение.** Поскольку порядок не важен, и не все элементы участвуют в соединении, то речь идет о сочетаниях и в случае выбора журналов и в случае выбора газет, количество способов выбора N =$ С\_{9}^{ 2}$ • $ С\_{6 }^{ 3}$= 720.

**Ответ:** 720.

1. На полке надо разместить 10 различных пособий по алгебре, из которых четыре – сборники задач, причем сборники задач должны стоять рядом. Определите число возможных способов.

**Решение**. Все элементы участвуют в случае перестановки пособий и сборников задач. Четыре сборника задач будем считать за одну книгу (1), остается 6 пособий тогда в перестановках участвует 7 элементов. $Р\_{7}$= 7! = 5040. Теперь учтем перестановки четырех сборников задач $Р\_{4}$=4! = 24. Значит всего способов

N =5040•24 = 120960.

**Ответ:** 120960.

1. Десять девочек должны разместиться на десятиместной скамье так, чтобы входящие в их число Катя, Вера и Юля сидели рядом, причем Юля сидела бы между Катей и Верой. Определите число возможных комбинаций.

**Решение**. Пусть девочки сидят рядом, тогда в перестановке участвуют 8 объектов. $Р\_{8}$= 8! = 40 320. Перестановки среди девочек, при условии, что Юля в середине, две: Катя, Юля, Вера или Вера, Юля, Катя. Значит всего N = 40 320 • 2 = 80 640.

**Ответ:** 80 640**.**

**Материал для повторения по теме: «Вероятность элементарных событий»**

***Вводное слово учителя***

**Теория вероятностей** – это математическая наука, которая описывает и изучает случайные явления.

**Случайные явления** – это те явления, окончание и результат которых невозможно предсказать заранее. *Пример: при бросании кубика выпадет четное число очков*.

**Случайным экспериментом** (опытом, испытанием) называются условия и действия, при которых может наступить случайное событие.

**Элементарные события** или **элементарные исходы** - это совокупность неделимых на составные части, простейших событий, которыми может заканчиваться случайный эксперимент.

**Заполните таблицу №1(по образцу)**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Случайный эксперимент | Элементарные события | Количество элементарных исходов |
| 1 | Подбросили монету 1 раз | О(орел) или Р(решка)  | N =2 |
| 2 | Подбросили монету 2 раз | ОО, ОР, РО, РР  | N = |
| 3 | Подбросили монету 3 раза | ООО, …РРР | N = |

**Заполните таблицу №2 (по образцу)**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Случайный эксперимент (опыт) | Элементарные события | Кол-во элементарных исходов |
| 1 | Подбросили игральную кость 1 раз | Кубик выпал одной из шести граней вверх | N = 6 |
| 2 | Подбросили игральную кость 2 раза |  | N = |
| 3 | Подбросили игральную кость 3 раза |  | N = |

**Вероятность** – мера правдоподобия того, что какое-то из возможных элементарных событий наступит.

События называются **равновозможными элементарными событиями**, если шансы их наступления в случайном опыте одинаковы.

Элементарные события, при которых наступит событие А, называются благоприятствующими событию А.

**Если в случайном опыте конечное число элементарных событий и все они равновозможны, то вероятность события А равна отношению числа элементарных событий, благоприятствующих событию А, к общему числу элементарных событий Р(А) =**$ \frac{N (A)}{N}$ **.**

**Решите задачи.**

**№ 1.** Симметричный игральный кубик бросили два раза. Известно, что при первом броске выпало больше очков, чем при втором. Какова вероятность того, что в сумме выпало семь очков? (Сайт Решу ВПР - 25, 10 класс).

**Решение.**

Событие А- в результате двух бросков кубика выпадает 7 очков, при этом при первом броске выпадает больше очков, чем при втором

N(A) = 3 - это пары (6 + 1); (5 + 2); (4 + 3).

Для подсчета общего количества исходов N следует учесть условие задачи «при первом броске выпало больше очков, чем при втором».

- Если при первом броске кубика выпало 6 очков, то при втором броске могло выпасть 1, 2, 3, 4 или 5 очков — 5 вариантов.

- Если при первом броске выпало 5 очков, при втором могло выпасть 1, 2, 3 или 4 очка — 4 варианта.

- Если при первом броске выпало 4 очка, при втором могло выпасть 1, 2 или 3 очка — 3 варианта.

- Если при первом броске выпало 3 очка, при втором могло выпасть 1 или 2 очка — 2 варианта.

- Если при первом броске выпало 2 очка, при втором могло выпасть только 1 очко — 1 вариант.

Итого при двух бросках кубиков возможны 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15 исходов.

N = 15.

Следовательно, вероятность того, что при двух бросках в сумме выпало 7 очков, при этом при первом броске выпало больше очков, чем при втором, равна P(A) = $\frac{3}{15}$ = 0,2.

**Ответ:** 0,2.

**№ 3.** Симметричную монету бросили дважды. Какова вероятность появления двух орлов?

Решение.

Всего исходов 4: ОО, ОР, РО, РР. N = 4.

A выпали 2 орла, N(A) = 1.

P(A) = $\frac{N(A)}{N}= \frac{1}{4}$ = 0,25.

**Ответ:** 0,25.

**№ 4.** Ученик записал в тетради произвольное двузначное число. Какова вероятность того, что сумма цифр этого числа окажется равной 6? Ответ округлите до тысячных.

**Решение.**

А – выписаны числа, сумма цифр которых равна 6.

Возможные числа: 15; 51; 24; 42; 33; 60

Чисел, обладающих необходимыми свойствами 6, а всего двузначных чисел 90.

Р(А) = $\frac{6}{90}$ $≈$ 0,067

**Ответ:** 0, 067.

**№ 5.** Набирая номер телефона, состоящий из 7 цифр, абонент забыл, в какой последовательности идут последние 3 цифры. Помнит лишь, что это цифры 1, 5, 9. Какова вероятность, что абонент набрал верный номер? Ответ округлите до сотых.

**Решение.**

А – верная последовательность последних трех цифр телефона.

N (A) = 1, N = $Р\_{3} $= 3! = 6.

Р(А)$ =\frac{1}{6}$ $≈$ 0,17.

**Ответ:** 0,17.

**№ 6**. В ящике находится 10 деталей, одна из которых нестандартная. Наугад берут 2 детали. Какова вероятность того, что обе детали окажутся стандартными?

**Решение.**

А = {ОБЕ СТАНДАРТНЫЕ},

N (А) = $С \_{9}^{2}=$ 36, N = $С \_{10}^{2}$ = 45;

Р (А) = 36:45 = 4:5 = 0,8.

**Ответ: 0, 8**

**№ 6.** Три билета на ёлку распределили по жребию между 15 мальчиками и 12 девочками. Какова вероятность того, что все билеты достанутся девочкам? Ответ округлите до тысячных.

**Решение.**

А – билеты достанутся девочкам.

15 + 12 = 27 детей

 $Общее количество исходов N= С\_{27}^{ 3}$= $\frac{27!}{3!24!}$ = $\frac{27•26•25}{2•3}$;

количество благоприятных исходов $N\left(A\right)= С\_{12}^{ 3} $= $\frac{12!}{3!9!}$ =$ \frac{10•11•12}{2•3}$;

Р(А) =$ \frac{10•11•12}{25•26•27}$ =$ \frac{44}{585}$ $≈$ 0, 075.

**Ответ:** 0,075.

**№ 7.** В коробке лежат 8 красных и 4 синих карандаша. Наугад вынимают 2 карандаша. Какова вероятность того, что оба карандаша окажутся красными? Ответ округлите до сотых.

**Решение:**

А – оба карандаша красные,

всего карандашей 8 + 4 = 12,

Общее количество исходов N = $С \_{12 }^{2}$= $\frac{12!}{2! ∙ \left(12-2\right)!}$ = $\frac{12 ∙11 ∙10!}{2! ∙10!}=66$.

Количество благоприятных исходов N(A) = $С\_{8}^{ 2}= \frac{8!}{2!∙6!}=28.$

Р(А) = $С \_{8}^{2}$:$ С\_{12 }^{ 2}$=$ \frac{28}{66}= \frac{14}{33}$ $≈0, 42. $

**Ответ:** 0,42.

**Домашняя работа**

Повторите основные определения и правила из классной работы, рассмотрите образцы решения задач, после этого приступайте к выполнению упражнений для вашего варианта.

|  |  |
| --- | --- |
| **Вариант 1** | **Вариант 2** |
| 1. Сколькими способами могут разместиться 5 человек в салоне автобуса на пяти свободных местах?
2. Сколько трехзначных чисел, в которых нет одинаковых цифр, можно составить из цифр 1,2,5,7,9?
3. Победителю конкурса разрешается выбрать две книги из 10 различных в подарок. Сколькими способами он может сделать выбор?
4. В ящике находятся шары с номерами от1 до 25. Наугад вынимают один шар. Какова вероятность того, что номер будет простым числом?
5. Из 8 мальчиков и 5 девочек надо выделить 3 мальчиков и 2 девочек для работы на пришкольном участке. Сколькими способами это можно сделать?
6. На четырех карточках написаны цифры 1,3,5,7. Карточки перевернули и перемешали. Затем наугад последовательно положили эти карточки в ряд одну за другой и открыли. Какова вероятность, что в результате получится число, больше 7000?
 | 1. Сколькими способами можно составить расписание уроков на понедельник из литературы, алгебры, геометрии, истории, географии, причем сдвоенных уроков нет?
2. Сколько прямых можно провести через 10 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой?
3. Из 30 участников собрания надо выбрать председателя, заместителя и секретаря. Сколько способов существует?
4. В пакете лежат жетоны с номерами от 1 до 20. Наугад выбирают один жетон. Какова вероятность того, что номер, написанный на нем, будет простым числом?
5. Из 10 юношей и 12 девушек, прибывших на соревнования по теннису, тренер должен выделить 2 юношей и 2 девушек для участия в соревнованиях пар. Сколькими способами он может это сделать?
6. Н четырех карточках написаны буквы (о), (у), (к), (м). Карточки перевернули и перемешали. Затем наугад положили последовательно в один ряд и открыли. Какова вероятность того, что в результате получится слово «мука» или «кума»?
 |

**Ответы:**

|  |  |
| --- | --- |
| Вариант1 | Вариант2 |
| № 1. 5! = 120№ 2. 5 • 4 •3 = 60№ 3. $С\_{10}^{ 2} $= 45№ 4. 0,36№ 5. $С\_{8}^{ 3}$•$С\_{5}^{ 2}$ = 56•10 = 560№ 6. Всего 4! = 24, больше 7000, будет 3! = 6Р = 6/24 = 0,25 | № 1. 5! = 120№ 2. $С\_{10}^{ 2} $= 45№ 3. 30 • 29 • 28 = 24360№ 4. Р = 8/20 = 0,4№ 5. $С\_{10}^{ 2} $•$ С\_{12}^{ 2}$ = 45 • 66 = 2970№ 6. Р = 0, так как буквы (а) нет. |

***Урок №3***

**Тема урока №3: свойства сочетаний. Треугольник Паскаля**

**Тип урока:** урок повторения.

**Образовательная цель урока:** повторение свойств сочетаний; применение их к вычислениям; восстановление навыков использования треугольника Паскаля для вычисления числа сочетаний.

**Оборудование:** компьютер, проектор; карточки с задачами.

**Ход урока**

1. **Проверка домашней работы: выяснение затруднений, разбор задач, вызвавших затруднения.**
2. **Решите задачи**

|  |  |
| --- | --- |
| **Вариант 1** | **Вариант 2** |
| 1. Сколькими способами можно составить расписание уроков на понедельник из литературы, алгебры, геометрии, истории, географии, причем сдвоенных уроков нет?
2. Сколько прямых можно провести через 10 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой?
3. Из 30 участников собрания надо выбрать председателя, заместителя и секретаря. Сколько способов существует?
4. В пакете лежат жетоны с номерами от 1 до 20. Наугад выбирают один жетон. Какова вероятность того, что номер, написанный на нем, будет простым числом?
5. Из 10 юношей и 12 девушек, прибывших на соревнования по теннису, тренер должен выделить 2 юношей и 2 девушек для участия в соревнованиях пар. Сколькими способами он может это сделать?
6. На четырех карточках написаны буквы (о), (у), (к), (м). Карточки перевернули и перемешали. Затем наугад положили последовательно в один ряд и открыли. Какова вероятность того, что в результате получится слово «мука» или «кума»?
 | 1. Сколькими способами могут разместиться 5 человек в салоне автобуса на пяти свободных местах?
2. Сколько трехзначных чисел, в которых нет одинаковых цифр, можно составить из цифр 1,2,5,7,9?
3. Победителю конкурса разрешается выбрать две книги из 10 различных в подарок. Сколькими способами он может сделать выбор?
4. В ящике находятся шары с номерами от1 до 25. Наугад вынимают один шар. Какова вероятность того, что номер будет простым числом?
5. Из 8 мальчиков и 5 девочек надо выделить 3 мальчиков и 2 девочек для работы на пришкольном участке. Сколькими способами это можно сделать?
6. На четырех карточках написаны цифры 1,3,5,7. Карточки перевернули и перемешали. Затем наугад последовательно положили эти карточки в ряд одну за другой и открыли. Какова вероятность, что в результате получится число, больше 7000?
 |

1. По окончании работы может быть выполнена **Самопроверка**.

\*Способы ее организации учитель выбирает самостоятельно, например, можно вывести ответы на доску с помощью проектора. Если у обучаемых появятся вопросы, разобрать задачи, вызвавшие затруднения.

**Ответы к задачам проверочной работы:**

|  |
| --- |
| Вариант1 |
| №1. 5! = 120№2. $С\_{10}^{ 2} $= 45№3. 30 • 29 • 28 = 24360№4. Р = 8/20 = 0,4№5. $С\_{10}^{ 2} $•$ С\_{12}^{ 2}$ = 45 • 66 = 2970№6. Р = 0, так как буквы (а) нет. |

|  |
| --- |
| Вариант 2 |
| №1. 5! = 120№2. 5 • 4 •3 = 60№3. $С\_{10}^{ 2} $= 45№4. 0,36№5. $С \_{8}^{3}$•$С \_{5}^{ 2}$ = 56•10=560№6. Всего 4! = 24, больше 7000 3! = 6Р = 6/24 = 0,25 |

1. **Вторая часть урока «Повторение свойств сочетаний»**

**Ответьте на вопросы (фронтальная работа с классом)**

* 1. **Чему равен 0!**

**Самопроверка** 0! = 1

* 1. **Вычислите**

а) $С\_{n}^{ n}$; б) $С\_{n}^{ 0}$; в) $С\_{n}^{ 1}$; г) $С\_{n}^{ n - 1}$.

**Самопроверка**

а) $С\_{n}^{ n} = 1$; б) $С\_{n}^{ 0} = 1$; в) $С\_{n}^{ 1}$ = n; г) $С\_{n}^{ n - 1}= n$.

* 1. **Сравните**

а) $С\_{n}^{ m}$ и $С\_{n}^{ n-m}$; б) $С\_{n}^{ m} $и $С\_{n-1}^{ m -1}+ С\_{n-1}^{ m}$.

**Самопроверка**

а) $С\_{n}^{ m}$ = $С\_{n}^{ n-m}$; б) $С\_{n}^{ m} $= $С\_{n-1}^{ m -1}+ С\_{n-1}^{ m}$.

1. **Ответьте на вопросы (работа в парах)**



Урок 3. Рис.1

а) ответьте на вопрос с рисунка;

б) объясните каким образом можно продолжить строки треугольника Паскаля;

в) продолжите запись до шестой строки;

в) с помощью треугольника Паскаля вычислите $С\_{6}^{ 4}$.

Урок 3.Рис.2

$Самопроверка С\_{6}^{ 4}$= 15 (6 - нижний индекс в записи числа сочетаний - строка треугольника Паскаля; отсчет столбцов слева направо, от **нуля** до **n** (см. Урок 3. Рис.2, ответ находится на пересечении строки и диагонали)).

1. **Применяя свойства сочетаний и треугольник Паскаля, найдите верные равенства**

а)$ С\_{7}^{ 3}$ +$С\_{7}^{ 4}$ = 2$∙С\_{7}^{ 3}$ = 2 $∙ $35 = 70;

б) $С\_{6}^{ 4}$ + $С\_{6}^{ 1} = 16$;

в) $С\_{6}^{ 0}$ + $С\_{6}^{ 4}$ = 16;

г) $С\_{6}^{ 4}$ -$ С\_{6}^{ 1}$ = 9;

д) $С\_{6}^{ 4} - (С\_{5}^{ 3}$ + $С\_{5}^{ 4}$) = 0.

**Самопроверка:** верные равенства – а), в), г), д).

**Домашнее задание**

1. Повторить свойства сочетаний, по ссылке посмотреть видео <https://rutube.ru/video/e3996572c9133257bcf94836199c4340/>
2. **Вычислите, используя свойства сочетаний:**

а) $С\_{8}^{ 4} - С\_{6}^{ 4}$; б) $(С\_{8}^{ 4} - С\_{6}^{ 4}$)$(С\_{8}^{ 4} + С\_{6}^{ 4})$; в)$(С\_{8}^{ 4} - С\_{6}^{ 4})^{2};$

г) $ С\_{7}^{ 5} - 2∙(С\_{6}^{ 4}+С\_{6}^{ 5})$; д) $С\_{7}^{ 5} - С\_{7}^{ 2} + С\_{6}^{ 1} - С\_{6}^{ 5} + С\_{5}^{ 3} - С\_{5}^{ 2}$.

1. **Из приведенных ниже задач выберите и решите ТОЛЬКО задачу на вычисление числа сочетаний:**

а) Из 6 студентов, работавших над проектом, надо послать на конференцию двух делегатов. Сколько способов для этого существует?

б) Витя, Алексей, Саша, Иван хотят встать в очередь за билетами в кассу. Сколько способов для этого существует?

в) На собрании студенческой группы присутствует 10 человек. Для ведения собрания надо выбрать ведущего и секретаря. Сколько способов для этого существует?

**Решения и ответы**

**Упражнение 2.**

а) $С\_{8}^{ 4} - С\_{6}^{ 4}$ = 70 - 15 = 55;

б) $(С\_{8}^{ 4} - С\_{6}^{ 4}$)$(С\_{8}^{ 4} + С\_{6}^{ 4})$ = 4900 - 225 = 4625;

в) $(С\_{8}^{ 4} - С\_{6}^{ 4})^{2} $= $(70 - 15)^{2}$ = 5$5^{2}$ = 3025;

г) $С\_{7}^{ 5} - 2∙(С\_{6}^{ 4}+С\_{6}^{ 5})$ $= С\_{7}^{ 5} - 2∙С\_{7}^{ 5} = -С\_{7}^{ 5} $= - 70;

д) $С\_{7}^{ 5} - С\_{7}^{ 2} + С\_{6}^{ 1} - С\_{6}^{ 5} + С\_{5}^{ 3} - С\_{5}^{ 2} = 0.$

**Упражнение 3.**

На вычисление числа сочетаний задача под буквой а).$С\_{6}^{ 2}$ = 15.

***Урок №4***

**Тема урока №4: испытания Бернулли**

**Тип урока:** урок повторения.

**Образовательные цели урока:** повторение формулы Бернулли; применение ее к решению задач.

**Оборудование:** компьютер, проектор.

**Ход урока**

1. **Проверка домашнего задания** (одним из способов организации проверки домашнего задания может быть диктант):

|  |  |
| --- | --- |
| **Вариант 1** | **Вариант 2** |
| 1. Заполните пропуски так, чтобы поучилось верное равенство

а)$ С\_{n}^{ n}$= ...; б) $С\_{n}^{ 1}$ = ... | 1. Заполните пропуски так, чтобы поучилось верное равенство

а)$ С\_{n}^{ 0}$= ...; б) $С\_{n}^{ n - 1}$ = ... |
| Вычислите, используя треугольник Паскаля и свойства сочетанийа)$ С\_{9}^{ 4}$= ....;б)$ С\_{9}^{ 5}$= ...; в) $С\_{5}^{ 5} - С\_{5}^{ 0}$ = ...г) $С\_{5}^{ 4} +С\_{5}^{ 5} = ...$;д) $С\_{8}^{ 5}$ = ... . | Вычислите, используя треугольник Паскаля и свойства сочетанийа)$ С\_{7}^{ 4}$= ....;б)$ С\_{7}^{ 3}$= ...; в) $С\_{7}^{ 7} - С\_{7}^{ 0}$ = ...г) $С\_{4}^{ 3} +С\_{4}^{ 4} = ...$;д) $С\_{8}^{ 6}$ = ... . |



1. **Самопроверка (\*можно вывести ответы на экран, если возникнут вопросы, разобрать задания)**

|  |  |
| --- | --- |
| **Вариант 1** | **Вариант 2** |
| 1. Заполните пропуски так, чтобы поучилось верное равенство

а)$ С\_{n}^{ n}$= 1; б) $С\_{n}^{ 1}$ = n. | 1. Заполните пропуски так, чтобы поучилось верное равенство

а)$ С\_{n}^{ 0}$= 1; б) $С\_{n}^{ n - 1}$ = n. |
| Вычислите, используя треугольник Паскаля и свойства сочетанийа)$ С\_{9}^{ 4}$= 126;б)$ С\_{9}^{ 5}$= 126;в) $С\_{5}^{ 5} - С\_{5}^{ 0}$ = 1 - 1 =0;г) $С\_{5}^{ 4} +С\_{5}^{ 5} = С\_{6}^{ 5} = 6$;д) $С\_{8}^{ 5}$ = 56 . | Вычислите, используя треугольник Паскаля и свойства сочетанийа)$ С\_{7}^{ 4}$= 35;б)$ С\_{7}^{ 3}$= 35;в) $С\_{7}^{ 7} - С\_{7}^{ 0}$ = 1 = 1 = 0;г) $С\_{4}^{ 3} +С\_{4}^{ 4} = С\_{5}^{4} = 5$;д) $С\_{8}^{ 6}$ = 28 . |

1. **Испытания Бернулли**

\*Посмотреть видеофрагмент по ссылке (см. ниже, продолжительность фрагмента 6 мин.). Если нужно, останавливайте его, для того, чтобы ученики успели по ходу просмотра составить конспект. После предъявления текстов задач 2, 3 дайте ученикам время для их решения, а потом выполните самопроверку, включив решение автора.

[Теория вероятностей #8: формула Бернулли и примеры ее использования при решении задач - смотреть видео онлайн от «SelfEdu - мир знаний с Сергеем Балакиревым» в хорошем качестве, опубликованное 1 сентября 2024 года в 9:02:16.](https://rutube.ru/video/57590f52b451910b98047263ac475403/?ysclid=meb9ft07g4807386307)

**Если нет возможности показать видео в классе, то можно этот же материал проработать по распечатанному тексту.**

В ОГЭ и ЕГЭ часто встречаются задачи на подбрасывание монетки и игрального кубика. Для начала рассмотрим одну такую типовую задачу.

**Задача 1.** В случайном эксперименте симметричную монету бросают три раза. Найдите вероятность того, что решка выпадет ровно 2 раза.

**Решение.**

Такие задачи, обычно, решаются следующим образом. Задается событие A – «выпадение решки ровно два раза из трех». Вычисляется число возможных исходов при трехкратном подбрасывании монетки: . Их также можно изобразить графически (здесь «О» – это орел, а «Р» – это решка):



Среди этих вариантов число благоприятных исходов для события A, равно

m = 3 (они выделены оранжевым цветом). Соответственно, получаем значение вероятности события A:

P(A) = $\frac{m}{n}$ = $\frac{3}{8}$ = 0, 375.

**Ответ:** 0,375.

Однако, эту же задачу можно решить еще и так. Обозначим событие A как «выпадение решки при однократном подбрасывании». Вероятность этого события нам известна, она равна p = P(A) = $\frac{1}{2}$.

(Мы здесь вероятность P(A) обозначили через букву p). А противоположная вероятность 1 - p = 1- $\frac{1}{ 2}$ = $\frac{1}{2}$.

будет соответствовать всем остальным возможным исходам. В нашем случае – выпадению орла при однократном подбрасывании монетки. Используя эти обозначения, можно заметить, что вероятности событий, когда решка выпадает ровно два раза из трех, равны:



Эта вероятность для каждого случая одна и та же. И, учитывая, что эти три события несовместны, искомую вероятность можно записать в виде:



Как видите, получаем тот же результат. Кроме того, множитель 3, стоящий перед выражением, есть не что иное, как биноминальный коэффициент, то есть, число сочетаний из 3 по 2, которое записывается так:



Благодаря введению биноминального коэффициента, вместо чисел 2 и 3 можно записывать любые другие натуральные числа k и n (при условии ). И обобщить данную задачу на случай из n подбрасываний монетки с вычислением вероятности появлений решки (либо орла) ровно k раз (неважно в каком порядке):



Эта формула называется **формулой Бернулли**. Она позволяет на автомате решать задачи, подобные рассмотренной, без необходимости расписывания всех вариантов исходов. Возможно, она кажется несколько сложной и громоздкой? Однако, когда имеем дело с большим числом подбрасываний (от трех и более), то ее использование заметно упрощает процесс решения. И для примера рассмотрим такую задачу.

**Задача 2.** В случайном эксперименте симметричную монету бросают четыре раза. Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно 2 раза.

**Решение.**

Определяем событие A – «выпадение орла при однократном подбрасывании монетки». Его вероятность p = P(A) = $\frac{1}{2}$.

Общее число подбрасываний равно n = 3 из них k = 2 должен выпасть орел (в любом порядке). Подставляем эти значения в формулу Бернулли, получаем значение искомой вероятности:



**Ответ:** 0,375.

Обратите внимание, что мы получили тот же результат, что и при трехкратном подбрасывании. То есть, вероятность выпадения двух орлов при трехкратном и четырехкратном подбрасывании монетки одинакова. И в этом нет ошибки – это действительно так.

И еще обратите внимание на то, что формула Бернулли вычисляет вероятность появления в n экспериментах некоторого события A ровно k раз в произвольном порядке. Если же порядок имеет значение, например, нужно найти вероятность того, что первые два раза выпадет орел, а остальные два раза решка, то формула Бернулли здесь уже неприменима.

Для закрепления материала рассмотрим такую задачу.

**Задача 3.** Вероятность того, что в течение дня пойдет дождь, равна 0,2. Найдите вероятность того, что в течение недели три дня будут дождливыми.

**Решение.**

Зададим событие A – «в течение дня пойдет дождь». Вероятность этого события равна *p* = *P(A)* = 0,2. Нас интересует вероятность того, что из *n*=7 дней *k* = 3 дня будут дождливыми. Запишем формулу Бернулли для этих значений, получим:



**Ответ:** 0,114688.

А следующую задачу решите самостоятельно.

**Задача 4.** Вероятность того, что в течение года турист С. поедет в Японию, равна 0,4. Найдите вероятность того, что турист С. посетит Японию дважды на протяжении 6 лет.

**Решение.** Пусть А поездка в Японию в течение года, по условию

р = Р(А) = 0,4, n - количество лет, то есть n = 6, k - количество поездок, значит k = 2, тогда Р $ = С \_{6}^{2}∙ 0,4^{2}∙0,6^{6 - 2} = 15∙0,16∙0,1296 = 0, 31104.$

**Ответ:** 0,31104.

**Домашнее задание**

1. **Еще раз просмотрите видеофрагмент: Теория вероятностей #8: формула Бернулли.**
2. **Решите задачи**
3. Группа туристов планирует треккинг в горной местности. Известно, что в это время года погода в данном районе в случайно выбранный день хорошая с вероятностью 1/3. Найдите вероятность того, что погода будет хорошей ровно 2 дня из 5 дней треккинга, а в остальные дни – плохая. Ответ округлите до сотых. (Задача Анны Малковой).
4. Симметричную монету бросили 10 раз. Какова вероятность наступления события «Выпадет ровно 5 орлов»?
5. Симметричную монету бросили 10 раз. Какова вероятность наступления события «Выпадет ровно 4 орла»?

4) Во сколько раз вероятность выпадения пяти орлов больше вероятности выпадения четырех орлов?

5) Стрелок проводит тренировку. Какова вероятность события «первые два раза попал в мишень, а потом два раза промахнулся»?

1. **Решение.** Пусть А «сегодня хорошая погода», тогда р = Р(А) = $\frac{1}{3}$, по условию n = 5, k = 2.

**P =** $C\_{5}^{ 2}∙(\frac{1}{3})^{2}(1 - \frac{1}{3})^{3} =10∙\frac{1}{9}∙\frac{8}{27} = \frac{80}{243} ≈0, 33.$

**Ответ:** 0,33.

1. **Решение.** Пусть событие А «выпало ровно 5 орлов». Так как может выпасть либо орел, либо решка, вероятность выпадения орла р = 0, 5, тогда

Р (А) **=** $С \_{10}^{5}∙(0, 5)^{5}∙(0, 5)^{5} = 252∙ 0, 00032∙0, 00032 = 0, 0000258048.$

**Ответ:**$ 0,0000258048.$

1. **Решение.** Пусть событие А «выпало ровно 4 орла». Так как может выпасть либо орел, либо решка, вероятность выпадения орла р = 0, 5, тогда

Р (А) **=** $С \_{10}^{4}∙(0, 5)^{4}∙(0, 5)^{6} = 210 ∙ 0, 00016 ∙ 0, 00064 = 0, 000021504.$

**Ответ:**$ 0,000021504.$

1. **Решение.** По условию требуется найти, во сколько раз вероятность выпадения ровно 5 орлов больше вероятности выпадения ровно 4 орлов

$\frac{Р\_{5}}{Р\_{4}} = \frac{С \_{10}^{5}∙(0, 5)^{5}∙(0, 5)^{5}}{С \_{10}^{4}∙(0, 5)^{4}∙(0, 5)^{6}}$ = $\frac{С \_{10}^{5}}{С \_{10}^{4}}$ = $\frac{252}{210}$ = 1,2.

**Ответ:** 1,2.

1. **Решение.** Если вы внимательно посмотрели видеофрагмент, то заметили, что для испытаний Бернулли порядок наступления «успеха» - попадания и «неуспеха» - промаха неважен. В данной задаче порядок важен, события независимые, значит

Р = 0,$5^{2}∙(1 - 0,5)^{2} = 0,0625.$

**Источники информации**

**1.**Банк задач ФИПИ

**2.**Сайт РЕШУ ЕГЭ

**3.** [Теория вероятностей #8: формула Бернулли и примеры ее использования при решении задач - смотреть видео онлайн от «SelfEdu - мир знаний с Сергеем Балакиревым» в хорошем качестве, опубликованное 1 сентября 2024 года в 9:02:16.](https://rutube.ru/video/57590f52b451910b98047263ac475403/?ysclid=meb9ft07g4807386307)(дата последнего обращения 14.08.2025).

**4.** <https://rutube.ru/video/e3996572c9133257bcf94836199c4340/>