22. В кафе продаются пирожные четырёх сортов: эклеры, песочные, бисквитные и слоёные. Сколькими способами можно составить набор из 10 пирожных?

Ответ: C_{13}^{3}

23. Сколькими способами можно разделить 10 белых грибов, 15 подберезовиков и 8 подосиновиков между 4-мя ребятами (грибы одного вида считаются одинаковыми)?

Ответ: $C_{13}^{3} \cdot C_{18}^{3} \cdot C_{11}^{3}$

24. Сколькими способами можно представить число 1 000 000 000 в виде произведения трех сомножителей, если произведения, отличающиеся порядком множителей, считаются различными?

Ответ: $C_{11}^{2} \cdot C_{11}^{2}$

25. Сколькими способами можно расставить в ряд 5 зеленых, 30 красных и 20 синих шаров так, чтобы зеленые шары не стояли рядом? Все шары одного цвета считаются одинаковыми.

Ответ: $C_{50}^{20} \cdot C_{51}^{5}$. Решение. Сначала разложим красные и синие шары. Для этого надо выбрать 20 мест из пятидесяти для синих шаров. Затем между ними (а также слева и справа) остаётся 51 место, куда можно ставить зеленые шары. Из этих мест надо выбрать пять.

26. Сколькими способами можно расставить в ряд 5 зеленых и 30 красных шаров так, чтобы между любыми двумя зелеными шарами было хотя бы по 3 красных? Все шары одного цвета считаются одинаковыми.

Ответ: $C_{35-12}^{5} = C_{23}^{5}$

27. Сколько существует решений уравнения $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = 62$, если $n_1 \geq 5$, $n_2 \geq 4$, $n_3 \geq 2$, $n_4 \geq 1$, $n_5 \geq 6$.

Ответ: $C_{62-18+4}^{4}$

28. Сколько существует решений уравнения $x + y + z + t = 100$ в нечетных натуральных числах?

Ответ: а) $(2x_1 + 1) + (2y_1 + 1) + (2z_1 + 1) + (2t_1 + 1) = 100 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_1 + y_1 + z_1 + t_1 = 48 \Rightarrow C_{48+3}^{3}$

29. Сколько существует семизначных чисел, в которых каждая цифра не меньше предыдущей?

Ответ: C_{15}^{7}. Решение. Ставлю 8 перегородок между цифрами от 1 до 9 и кладу 7 шаров

20 февраля

Комбинаторика

Двоичные коды

1. Сколькими способами можно раздать 10 различных конфет двум детям?
2. Монету бросают 10 раз. Сколько существует различных последовательностей выпадения орлов и решек?
3. Белочка прячет грибы в два дупла. Сколькими способами можно это сделать, если у нее 10 различных грибов?
4. Решите предыдущую задачу при условии, что у белочки 3 дупла.
5. Монету бросают 10 раз. Сколько существует различных последовательностей выпадения орлов и решек, если известно, что решка выпала ровно 4 раза?

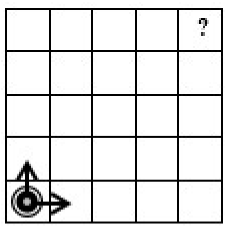
Двоичным кодом или *бинарной последовательностью* длины n называется последовательность длины n, каждый член которой равен 0 или 1.

6. Сколько существует двоичных кодов длины n?
7. Сколько существует двоичных кодов длины n, среди которых ровно k единиц?

В комбинаторике *сочетанием* из n по k называется набор из k элементов, выбранных из n-элементного множества, в котором не учитывается порядок элементов. Число сочетаний из n по k вычисляется по формуле: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Маршруты

8. В левом нижнем углу шахматной доски 5×5 стоит фишка. За один ход фишку разрешается передвинуть на одну клетку вправо или вверх. В каждой клетке записывается число способов передвинуть фишку из начального положения в данную клетку. Какое число записано в правом верхнем углу?



Ответ: $C_8^4 = \frac{8!}{4!\cdot 4!} = 70$

9. Вопрос тот же, но на центральную клетку фишку ставить нельзя.

Ответ: $C_8^4 - C_4^2 \cdot C_4^2 = \frac{8!}{4!\,4!} - \frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}\cdot\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}$ =34

10. В левой нижней клетке прямоугольника 4×11 сидит математическая черепаха. Она умеет двигаться на одну клетку вправо или на одну клетку вверх. Каким числом способов она может добраться до правой верхней клетки?

Ответ: 286 способов. Решение. Любой маршрут состоит из 13 шагов: 10 шагов вправо и 3 шага вверх. У черепахи (13·12·11):3! способов выбрать позиции для этих двух шагов вверх.

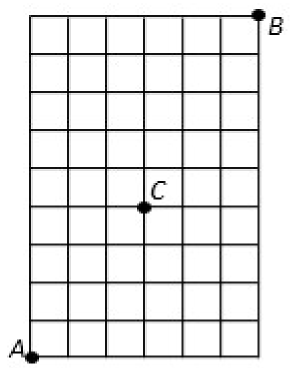
11. Куб 3×3×3 разбит плоскостями параллельными граням на 27 кубиков размером 1×1×1. Из любого кубика можно перейти в соседний с ним кубик, если тот находится выше, либо правее, либо дальше. Найдите количество способов пройти из кубика, расположенного в нижнем левом ближнем углу в дальний правый верхний угловой кубик.

Ответ: $\frac{6\cdot 5}{2\cdot 1}\cdot\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1} = 80$. Решение. Любой маршрут состоит из 6 шагов: 2 вверх, 2 вправо и 2 вперед. Кодируем 0, 1 и 2. Нужно узнать количество таких последовательностей: $C_6^2 \cdot C_4^4 = \frac{6\cdot 5}{2\cdot 1}\cdot\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}$

12. Решите предыдущую задачу для разбитого на кубики 1×1×1 параллелепипеда размером 4×5×6.

Ответ: $\frac{12\cdot 11\cdot 10}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 220\cdot 126 = 27720$. Решение. Любой маршрут состоит из 12 шагов: 3 шага вверх, 4 шага вправо и 5 шага вперед. Кодируем 0, 1 и 2. Нужно узнать количество таких последовательностей: $C_{12}^3 \cdot C_9^4 = \frac{12\cdot 11\cdot 10}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$

13. На рисунке изображён план города, разбитого на прямоугольные кварталы. Пешеход хочет пройти из пункта A в пункт B кратчайшим путём. Сколькими различными способами он сможет это сделать?



Ответ: C_{15}^6

14. Решите предыдущую задачу, если пешеход не хочет по пути проходить через точку C.

Ответ: $C_{15}^{6} - C_{7}^{3} \cdot C_{8}^{3}$

Шары и перегородки

15. В ряд стоят пять ящиков. Сколькими способами можно разложить по этим ящикам десять одинаковых шаров, если разрешается, чтобы ящики оставались пустыми?

Ответ: C_{14}^{4}

| |● ● ● |● ● ● ● ● |● ●

16. В ряд стоят пять ящиков. Сколькими способами можно разложить по этим ящикам десять одинаковых шаров так, чтобы ни один ящик не оказался пустым?

Ответ: C_{9}^{4}

● ● |● ● |● |● ● ● |● ●

17. Сколькими способами можно разложить 100 яиц по 7 корзинам, стоящим в ряд так, что пустыми могут остаться только две крайние корзины?
18. Переплетчик должен переплести 12 одинаковых книг в красный, зелёный или синий переплеты. Сколькими способами он может это сделать?

Ответ: C_{14}^{2} Решение. Задача эвивалентна задаче о разложении 12 шаров по трём ящикам.

19. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n\ ?$$

Ответ: C_{n-1}^{k-1}

20. Сколько решений в неотрицательных целых числах имеет уравнение

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n\ ?$$

Ответ: C_{n+k-1}^{k-1}

21. Поезду, в котором находится m пассажиров, предстоит сделать n остановок.

а) Сколькими способами могут выйти пассажиры на этих остановках?

б) Решите ту же задачу, если учитывается лишь количество пассажиров, вышедших на каждой остановке.

Ответ: а) n^m; б) C_{n+m-1}^{m}