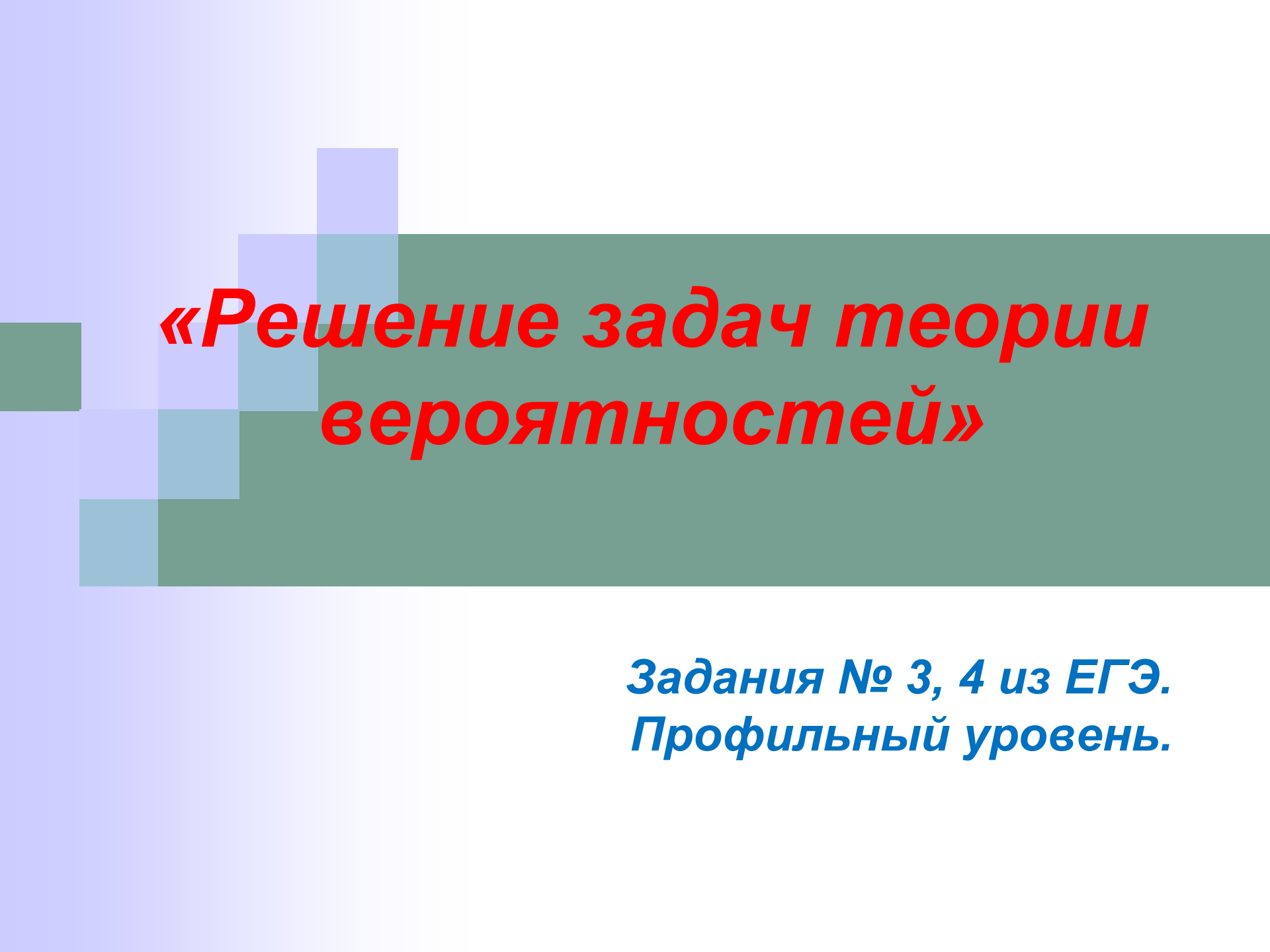




«Решение задач теории вероятностей»

***Задания № 3, 4 из ЕГЭ.
Профильный уровень.***

Код раз дела	Код контроли руемого элемента	Элементы содержания, проверяемые заданиями экзаменационной работы		
		Федеральный компонент государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования	Наличие позиций ФК ГОС в ПООП СОО	
			базовый уровень	углублённый уровень
6	ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, СТАТИСТИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ			
6.1	Элементы комбинаторики			
	6.1.1	Поочерёдный и одновременный выбор	Решение задач с применением комбинаторики	Использование комбинаторики
	6.1.2	Формулы числа сочетаний и перестановок. Бином Ньютона	Биномиальное распределение и его свойства	Биномиальное распределение и его свойства
6.2	Элементы статистики			
	6.2.1	Табличное и графическое представление данных	Решение задач на табличное и графическое представление данных	Использование таблиц и диаграмм для представления данных
	6.2.2	Числовые характеристики рядов данных	Использование свойств и характеристик числовых наборов: средних, наибольшего и наименьшего значения, размаха, дисперсии	Решение задач на применение описательных характеристик числовых наборов: средних, наибольшего и наименьшего значения, размаха, дисперсии и стандартного отклонения
6.3	Элементы теории вероятностей			
	6.3.1	Вероятности событий	Вычисление вероятностей в опытах с равновозможными элементарными исходами	Вычисление частот и вероятностей событий
	6.3.2	Примеры использования вероятностей и статистики при решении прикладных задач	Решение задач на вычисление вероятностей независимых событий, применение формулы сложения вероятностей. Решение задач с применением диаграмм Эйлера, дерева вероятностей, формулы Бернулли	Вычисление вероятностей независимых событий. Использование формулы сложения вероятностей, диаграмм Эйлера, дерева вероятностей, формулы Бернулли



1 группа:

*задания на использование классической
формулы вероятности.*

- а) Задания первого уровня сложности.***
- б) Задания второго уровня сложности.***
- в) Задания третьего уровня
сложности.***

Основные теоремы

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

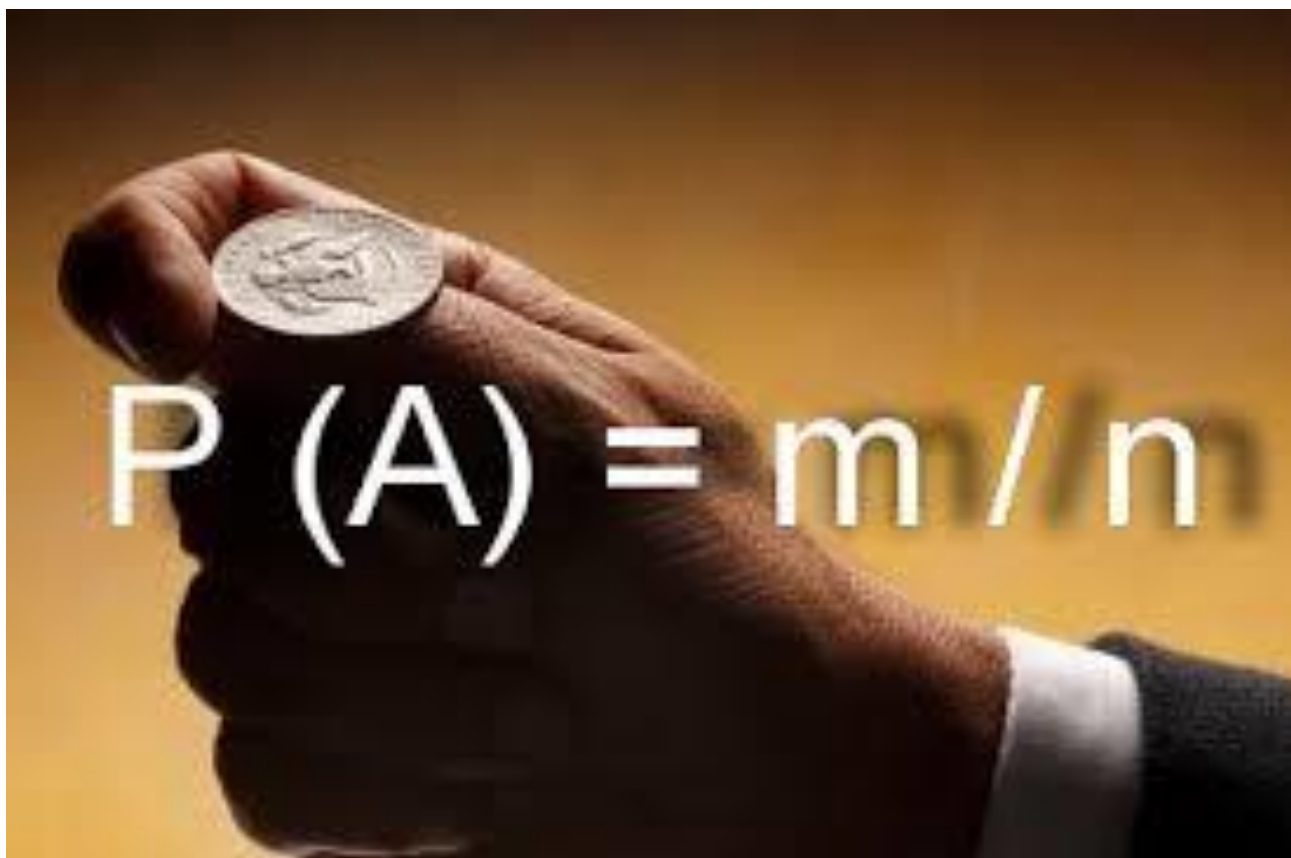
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Если события A и B независимы, то

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B | A)$$

Классическое определение вероятности



- ***Первый уровень сложности***

Научная конференция проводится в 5 дней. Всего запланировано 50 докладов — первые три дня по 12 докладов, остальные распределены поровну между четвертым и пятым днями. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что доклад профессора Н. окажется запланированным на последний день конференции?

Решение.

Сначала найдём, сколько докладов запланировано на последний день. На первые три дня запланировано $12 \cdot 3 = 36$ докладов. Остаются ещё $50 - 36 = 14$ докладов, которые распределяются поровну между оставшимися двумя днями, поэтому в последний день запланировано $\frac{14}{2} = 7$ докладов.

Будем считать исходом порядковый номер доклада профессора Н. Всего таких равновозможных исходов 50. Благоприятствуют указанному событию 7 исходов (последние 7 номеров в списке докладов). Искомая вероятность равна

$$\frac{7}{50} = \frac{7 \cdot 2}{50 \cdot 2} = \frac{14}{100} = 0,14.$$

Ответ: 0,14.

Если гроссмейстер А. играет белыми, то он выигрывает у гроссмейстера Б. с вероятностью 0,45. Если А. играет черными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,4. Гроссмейстеры А. и Б. играют две партии, причем во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

Решение.

Обозначим события: W = «А. выиграл белыми», B = «А. выиграл чёрными». По условию, $P(W) = 0,45$, $P(B) = 0,4$. Необходимо найти вероятность пересечения событий W и B , то есть $P(W \cap B)$. События W и B независимы (результат одной партии не зависит от результата другой), поэтому $P(W \cap B) = P(W) \cdot P(B) = 0,45 \cdot 0,4 = 0,18$.

Ответ: 0,18.

В чемпионате мира участвуют 24 команды. С помощью жребия их нужно разделить на четыре группы по шесть команд в каждой. В ящике вперемешку лежат карточки с номерами групп: 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4. Капитаны команд тянут по одной карточке. Какова вероятность того, что команда России окажется в третьей группе?

Решение.

Общее число исходов равно числу карточек — их 24. Благоприятных исходов 6 (так как номер 3 написан на шести карточках). Искомая вероятность равна $\frac{6}{24} = \frac{1}{4} = 0,25$.

Ответ: 0,25.

■ **Задание 1.**

В фирме такси в наличии 60 легковых автомобилей; 27 из них чёрного цвета с жёлтыми надписями на боках, остальные — жёлтого цвета с чёрными надписями. Найдите вероятность того, что на случайный вызов приедет машина жёлтого цвета с чёрными надписями.

Ответ: 0,55

■ **Задание 2.**

Миша, Олег, Настя и Галя бросили жребий — кому начинать игру. Найдите вероятность того, что начинать игру должна будет не Галя.

Ответ: 0,5



■ Задание 3.

В среднем из 1000 садовых насосов, поступивших в продажу, 7 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

Ответ : 0,993

■ **Задание 4.**

В сборнике билетов по химии всего 15 билетов, в 6 из них встречается вопрос по теме «Кислоты». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по теме «Кислоты».

Ответ: 0,4

- **Задание 5.** На чемпионате по прыжкам в воду выступают 45 спортсменов, среди них 4 прыгуна из Испании и 9 прыгунов из США. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что двадцать четвёртым будет выступать прыгун из США.

- **Ответ:** 0,2

- **Задание 6.** Научная конференция проводится в 3 дня. Всего запланировано 40 докладов — в первый день 8 докладов, остальные распределены поровну между вторым и третьим днями. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции?

- Ответ: 0,4

- 
- ***Второй уровень сложности.***

- 
- **Задание 1.** Перед началом первого тура чемпионата по теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 теннисистов, среди которых 9 участников из России, в том числе Тимофей Трубников. Найдите вероятность того, что в первом туре Тимофей Трубников будет играть с каким-либо теннисистом из России.

- 
- **Задание 2.** Перед началом первого тура чемпионата по бадминтону участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 76 бадминтонистов, среди которых 22 спортсмена из России, в том числе Виктор Поляков. Найдите вероятность того, что в первом туре Виктор Поляков будет играть с каким-либо бадминтонистом из России.

- 
- **Задание 3.** В классе 33 учащихся, среди них два друга — Андрей и Михаил. Учащихся случайным образом разбивают на 3 равные группы. Найдите вероятность того, что Андрей и Михаил окажутся в одной группе.

- 
- **Задание 4.** В классе 16 учащихся, среди них два друга — Олег и Михаил. Класс случайным образом разбивают на 4 равные группы. Найдите вероятность того, что Олег и Михаил окажутся в одной группе.
 - Ответ: 0,2



2 Группа: нахождение вероятности
противоположного события.

- 
- **Задание 1.** Вероятность попасть в центр мишени с расстояния 20 м у профессионального стрелка равна 0,85. Найдите вероятность не попасть в центр мишени.



■ ***Третий уровень сложности.***

- **Задание 1:** На фабрике керамической посуды 20% произведенных тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 70% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Ответ округлите до сотых.

Решение.

Пусть всего произведено x тарелок. Качественных тарелок $0,8x$ (80% от общего числа), они поступают в продажу. Дефектных тарелок $0,2x$, из них в продажу поступает 30%, то есть $0,3 \cdot 0,2x = 0,06x$. Всего в продажу поступило $0,8x + 0,06x = 0,86x$ тарелок. Вероятность купить тарелку без дефектов равна $\frac{0,8x}{0,86x} = \frac{40}{43} \approx 0,93$.

Ответ: 0,93.

- 
- **Задание 2.** На фабрике керамической посуды 30% произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 60% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка имеет дефект. Ответ округлите до сотых.



Самостоятельная работа

- По вариантам с карточек

■ **«Моя оценка»:**

- «0» - ничего не делал.
- «1» - иногда принимал участие в обсуждении тем урока и кое-что решал.
- «2» - Активно участвовал в дискуссиях по теме урока. Получил большинство верных решений к задачам, решаемым вместе с классом. Думаю, что с задачами самостоятельной работы справился на 70% и более.
- «3» - Активно участвовал в дискуссиях по теме урока. Все задачи, решаемые вместе с классом, решил верно. Думаю, что с задачами самостоятельной работы справился на 80% и более



2 урок



3 Группа: Нахождение
вероятности наступления хотя
бы одного из несовместных
событий. *Формула сложения*
вероятностей.

В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,4. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,22. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Решение.

1-й способ.

Так как $0,4 \cdot 0,4 \neq 0,22$, то события «кофе закончился в 1-ом автомате» и «кофе закончился во 2-ом автомате» зависимые. Обозначим через A событие «кофе остался в первом автомате», через B — «кофе остался во втором автомате». Тогда $P(A) = P(B) = 1 - 0,4 = 0,6$. Событие «кофе остался хотя бы в одном автомате» — это $A \cup B$, его вероятность равна $P(A \cup B) = 1 - 0,22 = 0,78$, так как оно противоположно событию «кофе закончился в обоих автоматах». По формуле для пересечения событий:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,6 + 0,6 - 0,78 = 0,42.$$

2-й способ.

Обозначим через X событие «кофе закончился в первом автомате», через Y — «кофе закончился во втором автомате». Тогда по условию $P(X) = P(Y) = 0,4$, $P(X \cap Y) = 0,22$. Так как $P(X \cap Y) \neq P(X) \cdot P(Y)$, то события X и Y зависимые. По формуле для объединения событий:

$$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y) = 0,4 + 0,4 - 0,22 = 0,58.$$

Мы нашли вероятность события $X \cup Y$ «кофе закончился хотя бы в одном автомате». Противоположным событием будет

$\overline{X \cup Y}$ «кофе остался в обоих автоматах», его вероятность равна $P(\overline{X \cup Y}) = 1 - P(X \cup Y) = 1 - 0,58 = 0,42$.

Биатлонист пять раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,6. Найдите вероятность того, что биатлонист первые два раза попал в мишени, а последние три — промахнулся. Результат округлите до сотых.

Решение.

Обозначим через A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 события, означающие попадание в мишень при соответствующем выстреле. По условию $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = P(A_5) = 0,6$. Нам необходимо найти вероятность $P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap \overline{A_5})$.

Так как рассматриваемые события независимы, то эта вероятность равна $P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A_3}) \cdot P(\overline{A_4}) \cdot P(\overline{A_5}) =$
 $= 0,6 \cdot 0,6 \cdot (1 - 0,6) \cdot (1 - 0,6) \cdot (1 - 0,6) = 0,6^2 \cdot 0,4^3 =$
 $= 0,36 \cdot 0,064 = 0,02304 \approx 0,02$.

Ответ: 0,02.

Вероятность того, что новая кофемолка прослужит больше года, равна 0,93. Вероятность того, что она прослужит больше двух лет, равна 0,81. Найдите вероятность того, что кофемолка прослужит меньше двух лет, но больше года.

Решение.

1-й способ.

Обозначим через A событие «кофемолка прослужит больше года, но меньше двух лет», через B событие «кофемолка прослужит больше двух лет». События A и B несовместны (кофемолка не может прослужить меньше двух лет и одновременно больше двух лет). Объединением событий A и B является событие $A \cup B$ «кофемолка прослужит больше года». По условию $P(A \cup B) = 0,93$, $P(B) = 0,81$. Так как A и B несовместны, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, откуда $P(A) = P(A \cup B) - P(B) = 0,93 - 0,81 = 0,12$.

2-й способ.

Будем рассуждать о том, когда может сломаться кофемолка. Она может сломаться уже на первом году работы, может сломаться на втором году работы, а может проработать более двух лет и сломаться потом. Будем заполнять следующую таблицу:

Событие	сломалась на первом году	сломалась на втором году	сломалась после двух лет работы
Вероятность			

Так как вероятность события «кофемолка прослужит больше года» равна 0,93, то вероятность противоположного события «кофемолка сломалась на первом году» равна $1 - 0,93 = 0,07$. Вероятность события «кофемолка сломалась после первых двух лет работы» по условию равна 0,81. Вносим найденные значения в таблицу:

Событие	сломалась на первом году	сломалась на втором году	сломалась после двух лет работы
Вероятность	0,07		0,81

В таблице перечислены три несовместных события, одно из которых обязательно произойдёт. Поэтому сумма вероятностей в таблице должна быть равна 1. Следовательно, незаполненное искомое значение можно вычислить как $1 - 0,07 - 0,81 = 0,12$.

Ответ: 0,12.

- 
- **Задание 2.** При изготовлении подшипников диаметром 67 мм вероятность того, что диаметр будет отличаться от заданного меньше, чем на 0,01 мм, равна 0,965. Найдите вероятность того, что случайный подшипник будет иметь диаметр меньше чем 66,99 мм или больше чем 67,01 мм.



Маша подбросила игральную кость три раза.
Известно, что в сумме выпало 7 очков.
Какова вероятность события
«хотя бы один раз выпало три очка»?

Решение.

Событие А – сумма очков в результате трех подбрасываний игральной кости равна 7.

Событие В – хотя бы один раз сумма очков равна 3.

$P(B|A)$ -?

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

Перечислим возможные варианты, когда сумма очков в результате трех подбрасываний игральной кости равна 7:
(1;1;5), (1;5;1), (5;1;1); (1;2;4), (1;4;2), (2;1;4), (2;4;1), (4;1;2)
(4;2;1), (1;3;3), (3;1;3), (3;3;1), (2;2;3), (2;3;2), (3;2;2).

$P(A)=15$, $P(AB)=6$.

$$P(B|A) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} = 0,4.$$

- 
- Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 30% этих стекол, вторая – 70%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, а вторая – 4%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

- Ответ: 0,037

- 
- **Задание 3.** Стрелок стреляет по мишени, разделенной на 3 области. Вероятность попадания в первую область равна 0,45, во вторую – 0,35. Найти вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадет либо в первую, либо во вторую область.

Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 60% яиц из первого хозяйства — яйца высшей категории, а из второго хозяйства — 40% яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 48% яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

Решение.

Пусть x — искомая вероятность. Пусть всего закуплено n яиц. Тогда в первом хозяйстве закуплено $x \cdot n$ яиц, из них $0,6x \cdot n$ высшей категории. Во втором хозяйстве закуплено $(1 - x) \cdot n$ яиц, из них $0,4 \cdot (1 - x) \cdot n$ высшей категории. Всего высшую категорию имеют $0,48n$ яиц. Отсюда

$$0,6x \cdot n + 0,4 \cdot (1 - x) \cdot n = 0,48n,$$

$$0,6x + 0,4 \cdot (1 - x) = 0,48,$$

$$0,6x + 0,4 - 0,4x = 0,48,$$

$$0,2x = 0,08,$$

$$x = 0,4.$$

Ответ: 0,4.

- 
- **Задание 1.** Найти вероятность того, что при бросании кубика выпадет 5 или 6 очков.

- 
- **Задание 2.** В урне 30 шаров: 10 красных, 5 синих и 15 белых. Найти вероятность вытянуть цветной шар.

- 
- **Задание 4.** Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 18 пассажиров, равна 0,95. Вероятность того, что окажется меньше 12 пассажиров, равна 0,6. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 12 до 17.

- 
- **Задание 5.** Вероятность того, что новый электрический чайник прослужит больше года, равна 0,97. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,89. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

- 
- **Задание 6.** Вероятность того, что на тестировании по биологии учащийся У. верно решит больше 9 задач, равна 0,61. Вероятность того, что У. верно решит больше 8 задач, равна 0,73. Найдите вероятность того, что У. верно решит ровно 9 задач.



4 Группа:

*Вероятность одновременного наступления независимых событий.
Формула умножения вероятностей.*

- 
- **Задание 2.** Помещение освещается фонарем с тремя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,3. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

Решение.

Событие A – «в течение года хотя бы одна лампа не перегорит».

Противоположное событие $\bar{A}$ – «в течение года обе лампы перегорят»

Событие B – «в течение года одна лампа перегорит».
 $p(B)=0,3$.

$$\bar{A} = B \cdot B$$

Так как одна лампа перегорает независимо от другой, то

$$p(\bar{A}) = p(B \cdot B) = p(B) \cdot p(B) = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09.$$

$$p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - 0,09 = 0,91.$$

- 
- **Задание 3.** В магазине два продавца. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,4. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени оба продавца заняты одновременно (считайте, что клиенты заходят независимо друг от друга).

- 
- **Задание 4.** В магазине три продавца. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,2. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени все три продавца заняты одновременно (считайте, что клиенты заходят независимо друг от друга).

- 
- **Задание 5:** По отзывам покупателей, Михаил Михайлович оценил надежность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А, равна 0,81. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина В, равна 0,93. Михаил Михайлович заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар.

- 
- **Задача 6:** Если гроссмейстер А. играет белыми, то он выигрывает у гроссмейстера Б. с вероятностью 0,6. Если А. играет черными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,4. Гроссмейстеры А. и Б. играют две партии, причем во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.



5 Группа:

***Задачи на применение обеих
формул. Формула Бернулли.***



При подозрении на наличие некоторого заболевания пациента отправляют на ПЦР-тест. Если заболевание действительно есть, то тест подтверждает его в 88 % случаев. Если заболевания нет, то тест выявляет отсутствие заболевания в среднем в 92 % случаев. Известно, что в среднем тест оказывается положительным у 11 % пациентов некоторой поликлиники, направленных на тестирование. При обследовании пациента А. врач направил его на ПЦР-тест, который оказался положительным. Какова вероятность того, что пациент А. действительно имеет это заболевание?

Решение.

Пусть эксперимент заключается в выборе одного случайного пациента, направленного на анализ.

H_1 — «этот пациент болен», H_2 — «этот пациент не болен».

A — «у наудачу взятого пациента тест дал положительный результат».

По условию $P(A) = 0,11$.

$$P(H_1) = x, P(H_2) = 1 - x.$$

$$P(A|H_1) = 0,88, P(A|H_2) = 1 - 0,92 = 0,08. \quad P(H_1|A) - ?$$

$$P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) = 0,88x + 0,08(1 - x).$$

$$\text{Получим уравнение } 0,88x + 0,08(1 - x) = 0,11; x = \frac{3}{80}.$$

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1) \cdot P(H_1)}{P(A)} = \frac{0,88 \cdot \frac{3}{80}}{0,11} = 0,3.$$

- 
- **Задание 1:** Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется положительным. У больных гепатитом пациентов анализ дает положительный результат с вероятностью $0,9$. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью $0,02$. Известно, что 66% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.



Задание 2. Ковбой Билл попадает в муху на стене с вероятностью 0,8, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Билл стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,25. На столе лежит 5 револьверов, из них только 2 пристрелянные. Ковбой Билл видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Билл попадёт в муху.

Ответ: 0.47

Решение.

Так как из 5 револьверов 2 пристреляны, то вероятность схватить пристрелянный револьвер равна $\frac{2}{5} = 0,4$. Вероятность схватить один из трёх непрестрелянных револьверов равна $\frac{3}{5} = 0,6$.

Обозначим через A событие «Билл схватит пристрелянный револьвер и попадёт из него в муху». Так как события «Билл схватит пристрелянный револьвер» и «Билл попадёт из пристрелянного револьвера в муху» независимы, то $P(A) = 0,4 \cdot 0,8 = 0,32$. Аналогично вероятность события B «Билл схватит непрестрелянный револьвер и попадёт из него в муху» равна $P(B) = 0,6 \cdot 0,25 = 0,15$. События A и B несовместны (Билл не может одновременно стрелять как из пристрелянного, так и из непрестрелянного револьвера). Искомая вероятность равна

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,32 + 0,15 = 0,47.$$

Ответ: 0,47.

Задание 3:

В некоторой местности наблюдения показали:

1. Если июньское утро ясное, то вероятность дождя в этот день 0,1.
2. Если июньское утро пасмурное, то вероятность дождя в течение дня равна 0,4.
3. Вероятность того, что утро в июне будет пасмурным, равна 0,3.

Найдите вероятность того, что в случайно взятый июньский день дождя не будет.

В Волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причём погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью $0,9$ погода завтра будет такой же, как и сегодня. Сегодня 11 марта, погода в Волшебной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 14 марта в Волшебной стране будет отличная погода.

Решение.

Составим таблицу вероятностей для погоды в Волшебной стране.

	11 марта	12 марта	13 марта	14 марта
хорошая	1			
отличная	0			

Погода 12 марта с вероятностью $0,9$ останется хорошей, с вероятностью $0,1$ станет отличной. Занесём эти данные в таблицу.

	11 марта	12 марта	13 марта	14 марта
хорошая	1	$0,9$		
отличная	0	$0,1$		

Хорошая погода 13 марта может быть в двух случаях.

1) Погода 12 марта была хорошей и не изменилась. Вероятность этого равна $0,9 \cdot 0,9 = 0,81$.

2) Погода 12 марта была отличной и изменилась. Вероятность этого равна $0,1 \cdot 0,1 = 0,01$.

Таким образом, вероятность хорошей погоды 13 марта равна $0,81 + 0,01 = 0,82$. Вероятность отличной погоды 13 марта равна $1 - 0,82 = 0,18$. Заносим эти данные в таблицу.

	11 марта	12 марта	13 марта	14 марта
хорошая	1	0,9	0,82	
отличная	0	0,1	0,18	

1) Погода 13 марта была хорошей и изменилась. Вероятность этого равна $0,82 \cdot 0,1 = 0,082$.

2) Погода 13 марта была отличной и не изменилась. Вероятность этого равна $0,18 \cdot 0,9 = 0,162$.

Таким образом, вероятность отличной погоды 14 марта равна $0,082 + 0,162 = 0,244$.

	11 марта	12 марта	13 марта	14 марта
хорошая	1	0,9	0,82	
отличная	0	0,1	0,18	0,244

Ответ: 0,244.

Задание 4. При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна 0,2, а при каждом последующем — 0,7. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,98?

Решение.

1-й способ.

Вероятность промаха при первом выстреле равна $1 - 0,2 = 0,8$. Вероятность промаха при каждом последующем равна 0,3. Подсчитаем число выстрелов, при котором цель остаётся непоражённой с вероятностью менее $1 - 0,98 = 0,02$.

Вероятность непоражения после второго выстрела равна $0,8 \cdot 0,3 = 0,24$;
после третьего — $0,24 \cdot 0,3 = 0,072$;
после четвёртого — $0,072 \cdot 0,3 = 0,0216$;
после пятого — $0,0216 \cdot 0,3 = 0,00648$.

Следовательно, необходимо 5 выстрелов.

Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,05. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,98. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,08. Найдите вероятность того, что случайно выбранная из упаковки батарейка будет забракована системой контроля

Решение.

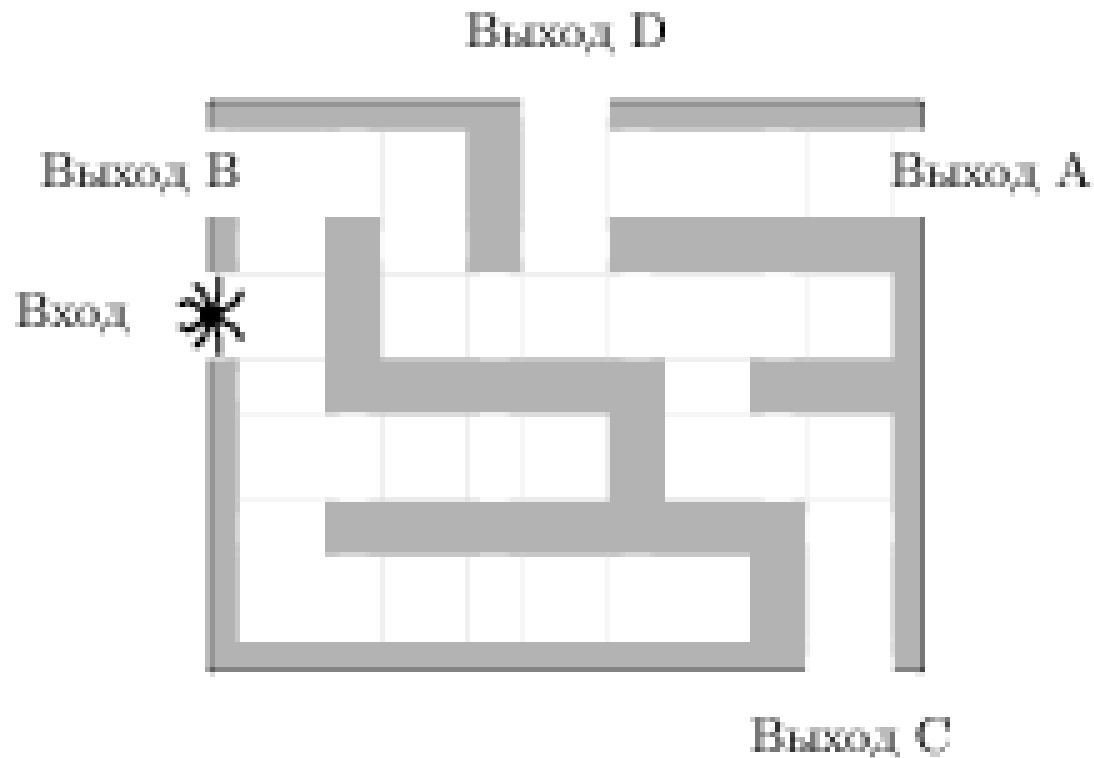
Для отбраковки неисправной батарейки должны произойти два независимых события: «линия произвела неисправную батарейку» и «неисправная батарейка забракована». Вероятность события A «произведена и забракована неисправная батарейка» равна $P(A) = 0,05 \cdot 0,98 = 0,049$.

Исправную батарейку линия производит с вероятностью $1 - 0,05 = 0,95$. Для отбраковки исправной батарейки должны произойти два независимых события: «линия произвела исправную батарейку» и «исправная батарейка забракована». Вероятность события B «произведена и забракована исправная батарейка» равна $P(B) = 0,95 \cdot 0,08 = 0,076$.

События A и B несовместны. Искомая вероятность равна $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,049 + 0,076 = 0,125$.

Ответ: 0,125.

На рисунке изображён лабиринт. Паук заползает в лабиринт в точке «Вход». Развернуться и ползти назад паук не может, поэтому на каждом разветвлении паук выбирает один из путей, по которому ещё не полз. Считая, что выбор дальнейшего пути чисто случайный, определите, с какой вероятностью паук придёт к выходу D .



Ответ: 0,0625

Теорема Бернулли

Вероятность $P_n(k)$ наступления ровно k успехов в n независимых повторениях одного и того же испытания находится по формуле

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

где p – вероятность «успеха»,
 $q = 1 - p$ - вероятность «неудачи» в
отдельном опыте.



Монета бросается 6 раз. Какова вероятность выпадения герба 0, 1, ...6 раз?

Решение. Число опытов $n=6$.

Событие A – «успех» – выпадение герба.

$$p = \frac{1}{2} \quad q = \frac{1}{2}$$

По формуле Бернулли требуемая вероятность равна

$$P_6(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$$

$$P_6(1) = C_6^1 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{6}{64}$$



■ Монета бросается 6 раз. Какова вероятность выпадения герба 0, 1, ...6 раз?

■ Решение. Число опытов $n=6$.
Событие A – «успех» – выпадение герба


$$P_6(2) = C_6^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{15}{64}$$

$$P_6(3) = C_6^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{20}{64}$$

$$P_6(5) = C_6^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{6}{64}$$

$$P_6(4) = C_6^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{15}{64}$$

$$P_6(6) = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$$



Петя бросает симметричную монету 26 раз.
Во сколько раз вероятность события
«решка выпадет ровно 7 раз» превосходит
вероятность события «решка выпадет
ровно 5 раз»?

Решение.

Вероятность того, что решка выпадет ровно 7 раз в серии испытаний из 26 бросков (используем схему Бернулли), равна

$$C_{26}^7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{19} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{26!}{7! \cdot 19!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{26}.$$

Вероятность того, что решка выпадет ровно 5 раз в серии испытаний из 26 бросков (используем схему Бернулли), равна

$$C_{26}^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{21} = \frac{26!}{5! \cdot 21!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{26}.$$

$$\begin{aligned} \text{Искомое отношение равно } & \frac{\frac{26!}{7! \cdot 19!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{26}}{\frac{26!}{5! \cdot 21!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{26}} = \frac{5! \cdot 21!}{7! \cdot 19!} = \frac{5!}{7!} \cdot \frac{21!}{19!} = \\ & = \frac{1}{6 \cdot 7} \cdot \frac{21 \cdot 20}{1} = 10. \end{aligned}$$



*В ящике 4 красных и 2 синих фломастера.
Фломастеры вытаскивают по очереди в случайном
порядке. Какова вероятность того, что первый раз
синий фломастер появится третьим по счету?*

Ответ: 0,2.



Чтобы поступить в институт на специальность «Архитектура», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 60 баллов по каждому из трёх предметов — математике, русскому языку и истории. Чтобы поступить на специальность «Живопись», нужно набрать не менее 60 баллов по каждому из трёх предметов — русскому языку, истории и литературе.

Вероятность того, что абитуриент Н. получит не менее 60 баллов по истории, равна 0,8, по русскому языку — 0,5, по литературе — 0,6 и по математике — 0,9.

Найдите вероятность того, что Н. сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

A — поступил (прошёл по баллам) на «Архитектуру».

$$P(A) = 0,9 \cdot 0,5 \cdot 0,8 = 0,36.$$

B — поступил (прошёл по баллам) на «Живопись».

$$P(B) = 0,5 \cdot 0,8 \cdot 0,6 = 0,36.$$

$$P(A \cap B) = 0,5 \cdot 0,8 \cdot 0,6 \cdot 0,9. \quad (\text{прошёл и туда, и туда})$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \\ &= 0,5 \cdot 0,8 \cdot (0,9 + 0,6 - 0,9 \cdot 0,6) = 0,384. \end{aligned}$$

Ответ: 0,384.



У Вадима есть два игральных кубика. Первый из них обычный, а на гранях второго кубика числа 2 и 4 встречаются по три раза. В остальном кубики одинаковые. Вадим наудачу выбрал один из двух кубиков и бросил его два раза. Известно, что в каком-то порядке выпали 2 и 4 очка. Какова вероятность того, что он бросил второй кубик?

Решение.

Рассмотрим две гипотезы:

H_1 — «был взят первый кубик»

H_2 — «был взят второй кубик».

По условию обязательно наступает ровно одна из этих гипотез,

$$P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}.$$

A — «в каком-то порядке выпали числа 2 и 4».

$$P(A|H_1) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{18}, \quad P(A|H_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad \begin{array}{l} \text{(Сначала 2, потом 4} \\ \text{или сначала 4 потом 2)} \end{array}$$

$$P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{18} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{18}$$

$$P(H_2|A) = \frac{P(A|H_2)P(H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{5}{18}} = 0,9.$$

Игорь бросал игральную кость до тех пор, пока сумма очков не превысила число 4. Найдите вероятность того, что потребовалось ровно 2 броска.

Решение.

Пусть H_i — событие, заключающееся в том, что при первом броске выпало i очков. Тогда $P(H_i) = \frac{1}{6}$ для любого целого i от 1 до 6. Пусть событие A — «сумма очков не превысила 4 при первом броске, но превысила при втором».

$$P(A|H_5) = P(A|H_6) = 0$$

При первом броске могло выпасть от 1 до 4 очков.

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + P(A|H_3)P(H_3) + P(A|H_4)P(H_4) = P(A|H_1) \cdot \frac{1}{6} + P(A|H_2) \cdot \frac{1}{6} + P(A|H_3) \cdot \frac{1}{6} + P(A|H_4) \cdot \frac{1}{6}.$$

Ясно, что $P(A|H_1) = \frac{3}{6}$ (если при первом броске выпало 1, то при втором броске должно выпасть 4, 5 или 6 — три варианта из шести).

Аналогично $P(A|H_2) = \frac{4}{6}$ (если при первом броске выпало 2, то при втором броске должно выпасть 3, 4, 5 или 6 — четыре варианта из шести).

Далее, $P(A|H_3) = \frac{5}{6}$ (если при первом броске выпало 3, то при втором броске должно выпасть 2, 3, 4, 5 или 6 — пять вариантов из шести).

Наконец, $P(A|H_4) = 1$ (если при первом броске выпало 4, то при втором броске сумма гарантированно превысит 4).

$$\text{Отсюда } P(A) = \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} = 0,5.$$



Петя бросает симметричную монету 26 раз.
Во сколько раз вероятность события
«решка выпадет ровно 7 раз» превосходит
вероятность события «решка выпадет
ровно 5 раз»?

Решение.

Вероятность того, что решка выпадет ровно 7 раз в серии испытаний из 26 бросков (используем схему Бернулли), равна $C_{26}^7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{19} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{26!}{7! \cdot 19!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{26}$.

Вероятность того, что решка выпадет ровно 5 раз в серии испытаний из 26 бросков (используем схему Бернулли), равна $C_{26}^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{21} = \frac{26!}{5! \cdot 21!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{26}$.

$$\begin{aligned} \text{Искомое отношение равно } & \frac{\frac{26!}{7! \cdot 19!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{26}}{\frac{26!}{5! \cdot 21!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{26}} = \frac{5! \cdot 21!}{7! \cdot 19!} = \frac{5!}{7!} \cdot \frac{21!}{19!} = \\ & = \frac{1}{6 \cdot 7} \cdot \frac{21 \cdot 20}{1} = 10. \end{aligned}$$



Маша коллекционирует принцесс из Киндер-сюрпризов. Всего в коллекции 10 разных принцесс, и они равномерно распределены, то есть в каждом очередном Киндер-сюрпризе может с равными вероятностями оказаться любая из 10 принцесс.

У Маши уже есть две разные принцессы из коллекции. Какова вероятность того, что для получения следующей принцессы Маше придётся купить ещё 2 или 3 шоколадных яйца?

Решение.

Присвоим принцессам номера от 1 до 10. Пусть в коллекции у Маши принцессы с номерами 1 и 2.

Событие А – Маше придётся купить ещё 2 или 3 шоколадных яйца.

Событие В – Маше придётся купить ещё 2 яйца.

Событие С – Маше придётся купить 3 шоколадных яйца.

Тогда $A=B+C$.

События В и С несовместны, $P(B+C)=P(B)+P(C)$.

$$P(B) = \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{10}, P(C) = \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{10},$$

$$P(B+C) = \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{10} + \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{10} = 0,16 + 0,032 = 0,192.$$